YU.A. SHASHKIN

PUNTOS FIJOS

LECCIONES POPULARES DE MATEMÁTICAS

Yu. A. SHASHKIN

PUNTOS FIJOS



EDITORIAL MIR

ÍNDICE

PRÓLOGO

Aplicar las matemáticas significa en muchos casos resolver ecuaciones. En este caso tiene gran importancia saber de antemano si éstas tienen raíces. La existencia de raíces de las ecuaciones la garantizan los llamados teoremas de existencia. He aquí uno de los teoremas más simples de este tipo: si la función f de una variable real x es continua en un segmento $[a, b]$ y toma en sus extremos valores de signos distintos, la ecuación

$$f(x) = 0 \tag{0.1}$$

tiene en este segmento por lo menos una raíz.

Los teoremas de existencia se expresan a menudo en forma de principios de punto fijo. Si, por ejemplo, se desea hallar la raíz de la ecuación (0.1) en el segmento $[a, b]$, la misma se reduce a la forma $\lambda f(h) + x = x$, en la que λ es cierto parámetro. Si ahora se introduce la designación $\lambda f(x) + x = F(x)$, llegamos a la ecuación

$$F(x) = x. \tag{0.2}$$

El parámetro λ lo elegimos de tal forma que todos los valores de la función F se encuentren en el segmento $[a, b]$. Entonces la ecuación (0.2) se puede considerar como sigue. Si a un punto (número real) x del segmento $[a, b]$ se le aplica la función (o, como suele decirse, la transformación o representación) F, como resultado se obtiene cierto punto $F(x) = y$ de ese mismo segmento, distinto, en general, de x; es decir, la transformación F desplaza x al punto y. Pero si el punto x_0 es raíz de la ecuación (0.2), ese punto no se desplaza a ninguna parte, sino que permanece *fijo*. Este mismo punto sirve, naturalmente, de raíz de la ecuación (0.1).

De esta forma, en el lenguaje geométrico, el teorema de solubilidad de la ecuación (0.2) se enuncia en forma del siguiente *principio de punto fijo*: si F es una función continua que transforma el segmento en sí mismo, existe por lo menos un punto fijo. Pero como F es una transformación continua totalmente arbitraria, aquí se manifiesta una propiedad del propio segmento, independiente de la representación concreta que se elija, llamada propiedad de punto fijo.

Análogamente, el problema de la solubilidad del sistema de dos ecuaciones

$$\begin{cases} f(x, y) = a, \\ g(x, y) = b \end{cases}$$

respecto de las incógnitas x e y, se puede reducir al problema de la existencia de un punto fijo en la transformación de un cuadrado (o, por ejemplo, de un círculo en sí mismo).

Los teoremas de los puntos fijos tienen muchas aplicaciones en matemáticas: a ellos se reducen en la mayoría de los casos los teoremas de existencia de soluciones de las ecuaciones diferenciales, integrales, operacionales y otras que se utilizan en nuevas ramas de las matemáticas aplicadas como son la economía matemática y la teoría de juegos.

El libro que hoy ofrecemos a la atención de los lectores se consagra esencialmente a un solo problema: ¿tienen acaso la propiedad del punto fijo figuras como el segmento, el cuadrado, la circunferencia o la esfera?

La teoría de los puntos fijos forma parte de la topología (véanse los libros [3] y [5]), rama de las matemáticas creada a finales del siglo XIX. En esta teoría se utilizan esencialmente conceptos topológicos tales como continuidad, compacidad, homotopía y grado de transformación.

Nuestro libro se propone también hablar de la aplicación en esta teoría de los razonamientos combinatorios ligados a la partición (*triangulación*) de las figuras en elementos aislados o caras (*simplex*), regularmente adyacentes entre sí.

En este prólogo deben mencionarse tres nombres.

El primero es el del célebre matemático francés J. H. Poincaré (1854–1912), fundador del método de los puntos fijos, previsor de su importancia para los problemas del análisis matemático y de la mecánica celeste, a los cuales dedicó muchos de sus trabajos. Poincaré fue el primero que utilizó en topología el método combinatorio o método de triangulación de las transformadas geométricas en simplex.

El segundo nombre es el del matemático holandés L. E. J. Brouwer (1881–1966). Él fue el que introdujo los conceptos topológicos empleados en este libro: homotopía y grado de transformación; demostró (1910–1911) los teoremas del punto fijo para el cuadrado, la esfera y sus análogos n-dimensionales.

El tercer nombre es el del matemático alemán E. Sperner (1905–1980), que en 1928 demostró el lema combinatorio-geométrico de la partición del triángulo (y, en general, del simplex n-dimensional), que ha desempeñado un importante papel en la teoría de los puntos fijos.

§ 1.
TRANSFORMACIÓN CONTINUA DEL SEGMENTO Y EL CUADRADO

Consideremos el segmento $I = [0, 1]$ en la recta numérica $\mathbf{R}$. Sea f una *función* que transforma I en sí misma. Esto significa que a cada punto x del segmento I, de acuerdo con cierta regla, le corresponde un único punto $f(x)$ de ese mismo segmento, llamado *imagen* del punto x, o que el punto x *se transforma* en su imagen $f(x)$. En vez de la palabra *función* utilizaremos también, en este caso, las de *transformación*, *aplicación* o *representación*: todas ellas serán sinónimas para nosotros. La única condición que se impone a la transformación f es que sea continua. Intuitivamente la continuidad está clara: la gráfica de esta transformación es una línea continua que se puede trazar sin levantar el lápiz del papel. Se dice también que es continua una representación, si ella transforma puntos próximos en próximos. Por ahora vamos a limitarnos a estas definiciones intuitivas y aplazaremos la definición exacta hasta el § 5.

Consideremos el cuadrado Q que se encuentra en un plano de coordenadas $\mathbf{R}^2$ tal, que las coordenadas cartesianas de todos sus puntos satisfacen las desigualdades $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ (fig. 1). Sea f la transformación continua del cuadrado Q en sí mismo. Esto significa que cada punto p de Q pasa a un determinado punto $f(p)$ de ese mismo cuadrado, imagen del punto p, y las imágenes de los puntos próximos también están próximas. Dar esta representación significa indicar dos funciones numéricas continuas $g(x, y)$ y $h(x, y)$ que, dadas en el cuadrado Q, satisfacen las desigualdades

$$0 \leqslant g(x, y) \leqslant 1, \quad 0 \leqslant h(x, y) \leqslant 1. \tag{1.1}$$

Si (x_0, y_0) es un punto del cuadrado, su imagen en esta transformación f será el punto de coordenadas $(g(x_0, y_0), h(x_0, y_0))$, que también se encuentra en el cuadrado en virtud de las desigualdades (1.1).

Vamos a precisar una vez más la relación que existe entre los conceptos de *transformación* y *función*. El primero lo empleamos en un sentido amplio, como la transformación de un conjunto cualquiera en un conjunto cualquiera (que puede ser el mismo u otro). La palabra función tiene siempre el significado de transformación de un conjunto cualquiera en una recta numérica.

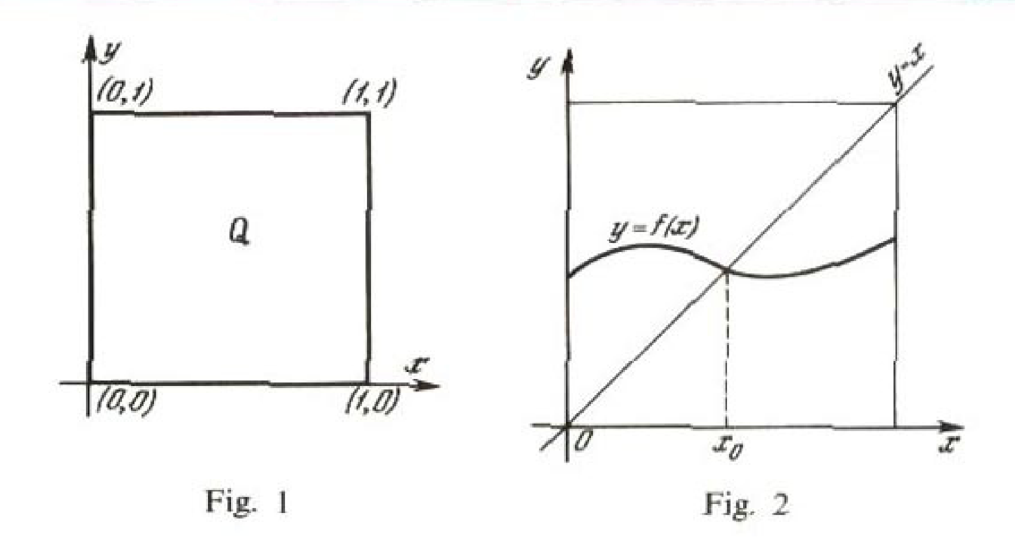


Fig. 1 Fig. 2

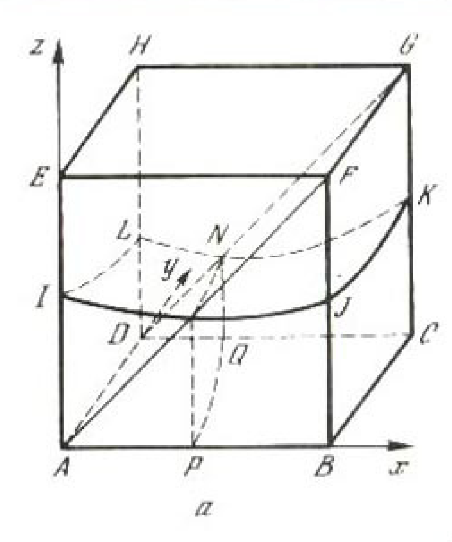
El teorema de Brouwer sobre el punto fijo dice: *toda transformación continua f de un segmento en sí mismo tiene por lo menos un punto fijo, es decir, un punto* x_0 *tal, que* $f(x_0) = x_0$; *toda representación continua de un cuadrado en sí mismo también tiene por lo menos un punto fijo.*

Subrayamos otra vez que en este teorema sólo se impone a la transformación f la condición de ser continua; de aquí se infiere su gran generalidad.

He aquí la demostración de este teorema para el segmento (fig. 2): la gráfica de la función f es una curva continua que une un punto determinado del lado izquierdo de un cuadrado con un punto del lado derecho; por consiguiente, esa curva debe cortar la diagonal de dicho cuadrado; pero las coordenadas $(x_0, f(x_0))$ del punto de la gráfica que se encuentra en la diagonal satisfacen la igualdad $f(x_0) = x_0$.

Para dar una demostración clara del teorema para el cuadrado hay que figurarse la gráfica de su transformación f. Pero un punto del cuadrado tiene dos coordenadas, y su imagen, otras dos. Por lo tanto, el par formado por el punto y su imagen viene descrito por cuatro coordenadas. Dicho de otra forma, la gráfica de la transformación f es una superficie curva en un espacio cuatridimensional. Figurarse esta superficie es muy difícil, por eso hay que elegir otro camino, a saber, dar dos figuras en vez de una.

He aquí esta demostración. En la fig. 3, *a* el cuadrado representado en sí mismo se designa por $ABCD$; el rectángulo $ADGF$ es la parte del plano $z = x$ que se encuentra sobre el cuadrado $ABCD$ (es decir, $ADGF$ es la gráfica de la función de dos variables, igual a x); $IJKL$ es la superficie continua $z = g(x, y)$ (gráfica de la función igual a $g(x, y)$); MN es la línea de



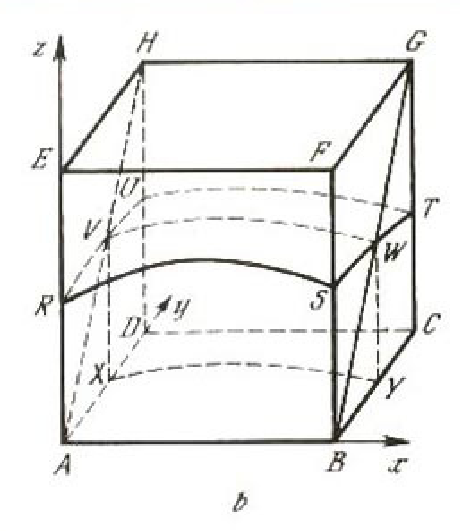


Fig. 3

intersección del plano $z = x$ con la superficie $z = g(x, y)$; la línea PQ es la proyección de MN sobre el plano $z = 0$. La curva continua PQ une los lados opuestos AB y CD del cuadrado, y las coordenadas de todos los puntos de esta curva satisfacen la ecuación $g(x, y) = x$.

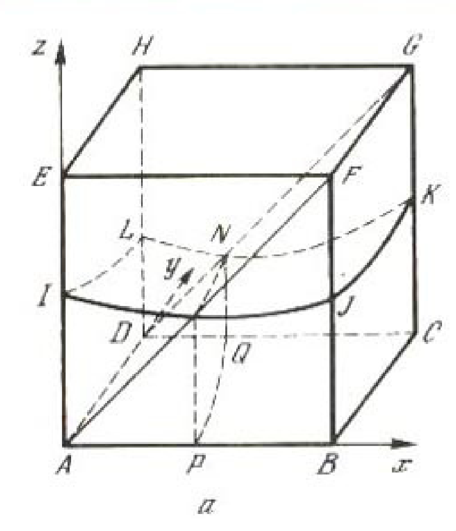
Análogamente, en la fig. 3, *b* el rectángulo $ABGH$ es la gráfica de la función $z = y$; la superficie curva $RSTU$ es la gráfica de la función $z = h(x, y)$; VW es la línea de intersección de esas dos gráficas, y XY, la proyección de dicha línea sobre el plano $z = 0$. La curva continua XY une los lados opuestos BC y AD del cuadrado, y las coordenadas de todos sus puntos satisfacen la ecuación $h(x, y) = y$. Ahora está claro que las curvas PQ y XY deben cortarse por lo menos en un punto (x_0, y_0), y este punto es fijo, puesto que se cumplen las igualdades $g(x_0, y_0) = x_0$ y $h(x_0, y_0) = y_0$.

Para poder demostrar con rigor el teorema de Bouwer vamos a necesitar conceptos y hechos nuevos. Son éstos, en primer lugar, los lemas combinatorios relacionados con la partición del segmento y el cuadrado (o triángulo) en un número finito de partes pequeñas; en segundo, la precisión del concepto de continuidad de la transformación, y en tercero, el concepto de compacidad.

PROBLEMAS

1. En la recta numérica **R** se dan las funciones

$$f_1(x) = 2x, \quad f_2(x) = \operatorname{sen} x, \quad f_3(x) = x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \quad f_4(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$



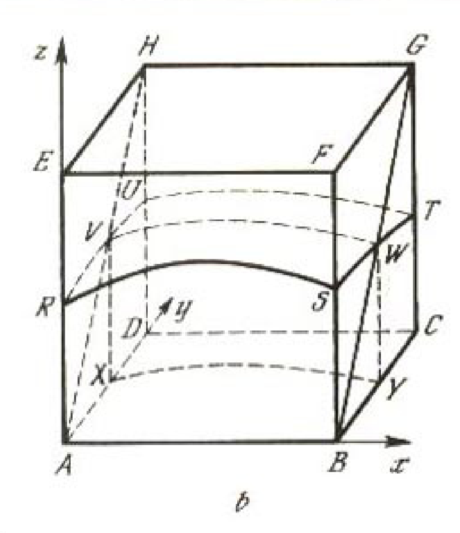


Fig. 3

intersección del plano $z = x$ con la superficie $z = g(x, y)$; la línea PQ es la proyección de MN sobre el plano $z = 0$. La curva continua PQ une los lados opuestos AB y CD del cuadrado, y las coordenadas de todos los puntos de esta curva satisfacen la ecuación $g(x, y) = x$.

Análogamente, en la fig. 3, *b* el rectángulo $ABGH$ es la gráfica de la función $z = y$; la superficie curva $RSTU$ es la gráfica de la función $z = h(x, y)$; VW es la línea de intersección de esas dos gráficas, y XY, la proyección de dicha línea sobre el plano $z = 0$. La curva continua XY une los lados opuestos BC y AD del cuadrado, y las coordenadas de todos sus puntos satisfacen la ecuación $h(x, y) = y$. Ahora está claro que las curvas PQ y XY deben cortarse por lo menos en un punto (x_0, y_0), y este punto es fijo, puesto que se cumplen las igualdades $g(x_0, y_0) = x_0$ y $h(x_0, y_0) = y_0$.

Para poder demostrar con rigor el teorema de Bouwer vamos a necesitar conceptos y hechos nuevos. Son éstos, en primer lugar, los lemas combinatorios relacionados con la partición del segmento y el cuadrado (o triángulo) en un número finito de partes pequeñas; en segundo, la precisión del concepto de continuidad de la transformación, y en tercero, el concepto de compacidad.

PROBLEMAS

1. En la recta numérica **R** se dan las funciones

$$f_1(x) = 2x, \quad f_2(x) = \operatorname{sen} x, \quad f_3(x) = x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \quad f_4(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

¿Cuáles de ellas representan al segmento [0, 1] en si mismo?

2. Para cada uno de los conjuntos siguientes dé un ejemplo de transformación continua del conjunto en si mismo sin puntos fijos: a) una recta numérica; b) el semiintervalo [0, 1]; c) el par de segmentos [− 2, − 1] y [1, 2].

3. Ponga un ejemplo de transformación discontinua del segmento [0, 1] en si mismo, exento de puntos fijos.

4. Si f es una función continua, la función f^2 se determina así: $f^2(x) = f[f(x)]$, es decir, para obtener $f^2(x)$ hay que aplicar la función f al punto $f(x)$. La transformación continua f del segmento [0, 1] en si mismo se llama *involución* si f^2 deja fijo cada punto del segmento. Dicho de otra forma, esto significa que la función f es la inversa de si misma.

Verifique que son involuciones las funciones siguientes:

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = 1 - h, \quad f_3(x) = \frac{1-x}{1+x},$$

$$f_4(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad f_5(x) = 1 - \sqrt{1 - (x-1)^2}.$$

Aqui $\sqrt{}$ denota el valor aritmético de la raiz.

La involución $f(x) = x$ es *trivial*.

Demuestre que toda involución no trivial tiene exactamente un punto fijo.

§ 2.
PRIMER LEMA COMBINATORIO

Asi vamos a llamar el lema 1 siguiente. También se conoce con el nombre de lema de Sperner para el segmento.

Lema 1. *Sea un segmento partido por un conjunto finito de puntos en segmentos pequeños. Supongamos que su extremo izquierdo está marcado con el número* 0, *el derecho, con el número* 1, *y que cada uno de los puntos divisorios tiene la marca* 0 *ó* 1. *En este caso existe un segmento pequeño cuyos extremos están marcados con números distintos. Es más, el número de estos segmentos es impar.*

Demostración. Diremos que un segmento pequeño es "bueno" si sus extremos tienen distintas marcas. Sólo existen dos casos posibles: o todos los puntos divisorios tienen la marca 0, o, aunque sólo sea uno de ellos, tiene la marca 1. En el primer caso hay exactamente un segmento bueno, el pequeño del extremo derecho (fig. 4, *a*). En el segundo caso se considera el punto divisorio marcado con el número 1 que está más a la izquierda. Es

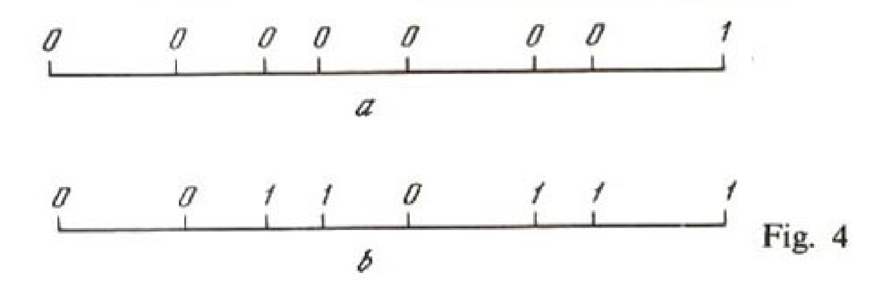


Fig. 4

evidente que el segmento cuyo extremo derecho sea este punto será bueno (fig. 4, *b*).

Demostremos ahora que el número de segmentos buenos es necesariamente impar. Para eso vamos a movernos por el segmento grande, de izquierda a derecha, empezando por su extremo izquierdo, numerando sucesivamente todos los segmentos buenos que encontremos: primero, segundo, etc. En este caso cada segmento bueno de número impar tendrá a la izquierda la marca 0, y a la derecha la marca 1, y cada segmento bueno de número par, al contrario. Como quiera que en el último segmento bueno la marca 1 está a la derecha, el número de todos los segmentos buenos es impar. El lema está demostrado.

Este lema se puede precisar como sigue. Un segmento diremos que es bueno del tipo (0, 1), si tiene a su izquierda la marca 0, y a su derecha la marca 1, y del tipo (1, 0), en el caso contrario. Entonces el número de segmentos del tipo (0, 1) será mayor en una unidad que el número de segmentos del tipo (1, 0). Al lector no le será difícil cerciorarse de esto.

§ 3.
SEGUNDO LEMA COMBINATORIO, O PASEO POR LAS HABITACIONES DE LA CASA

Este lema vamos a enunciarlo como afirmación de las habitaciones y las puertas que tiene una casa (fig. 5). Supongamos que se conoce que el número de puertas de cada habitación es igual a 0, a 1 ó a 2. La habitación con una sola puerta se llama *habitación sin salida*, y la que tiene dos puertas, *habitación de paso*. La puerta puede ser *exterior*, si da a la calle, o *interior*, si une dos habitaciones contiguas. Como es natural, debe suponerse también que una habitación sólo puede tener una puerta exterior, y dos habitaciones contiguas, nada más que una puerta común.

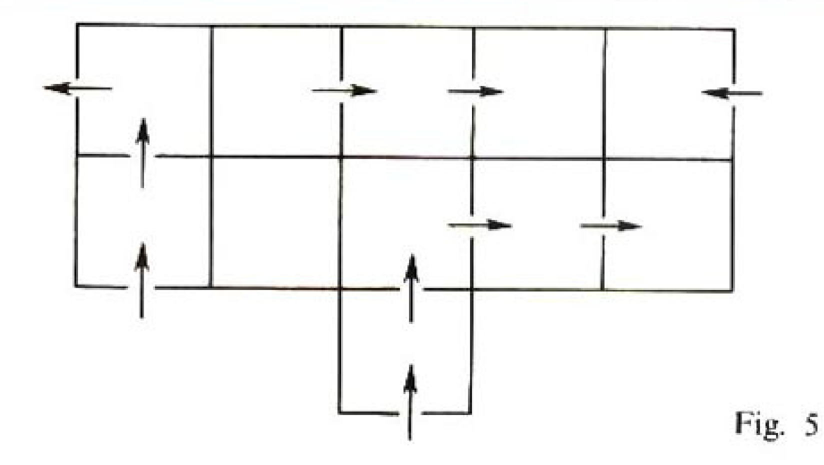


Fig. 5

Lema 2. *Si cada habitación de la casa tiene* 0, 1 *ó* 2 *puertas, el número de habitaciones sin salida y el de puertas exteriores tienen la misma paridad.*

Esto significa que dichos números son ambos pares o ambos impares.

Para *demostrar* este lema vamos a describir los paseos por las habitaciones de la casa. Estos se realizarán cumpliendo las reglas siguientes. Primera, por cada puerta sólo se permite pasar una vez. Segunda, el paseo se empieza bien desde la calle, entrando en la casa por una puerta exterior, o bien desde una habitación sin salida, atravesando luego habitaciones de paso, y termina de una de las dos formas siguientes: saliendo de la casa por una puerta exterior o llegando a una habitación sin salida (véase la fig. 5). En virtud de la suposición hecha sobre el número de puertas de las habitaciones, estas reglas determinan unívocamente el camino a seguir en cada paseo, ya que una vez que se entra en una habitación de paso sólo hay un procedimiento para salir de ella. Cuando se termina un paseo se empieza otro, y así sucesivamente hasta que se agoten todas las puertas exteriores y todas las habitaciones sin salida.

Como resultado se obtienen tres tipos de recorridos: 1) desde una puerta exterior hasta una habitación sin salida (o a la inversa, que es lo mismo), 2) desde una puerta exterior hasta otra puerta exterior, y 3) desde una habitación sin salida hasta otra habitación sin salida.

Llamemos m, n y p, respectivamente, los números de recorridos de primero, segundo y tercer tipo. Como a cada recorrido del primer tipo le corresponde una puerta exterior, y a cada recorrido del segundo tipo, dos puertas exteriores, el número total de dichas puertas será igual a $m + 2n$. Análogamente, el número total de habitaciones sin salida será $m + 2p$. Los números

$m + 2n$ y $m + 2p$ tienen la misma paridad, que es lo que se quería demostrar.

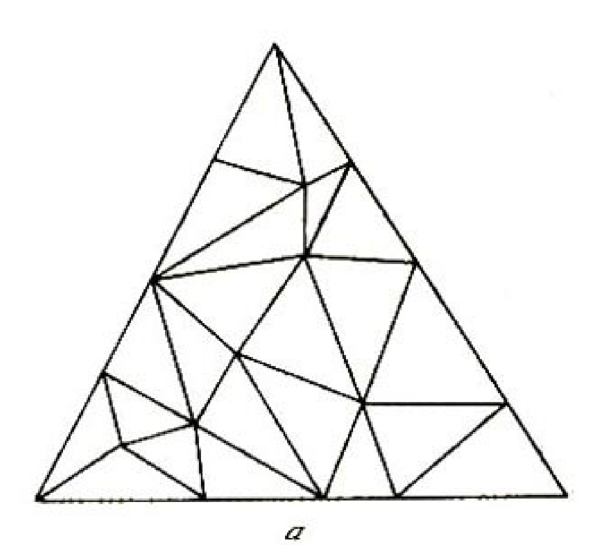
En este lema la forma de las habitaciones no desempeña papel alguno. Pueden ser, por ejemplo, triangulares, como supondremos con frecuencia en adelante.

§ 4.
LEMA DE SPERNER

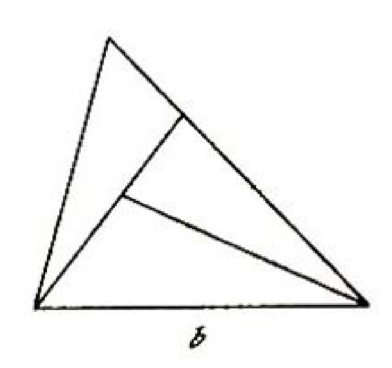
Consideremos un triángulo de forma arbitraria dividido en triángulos pequeños. Vamos a suponer siempre que esta partición satisface las condiciones siguientes: dos triángulos pequeños cualesquiera o no tienen punto común alguno, o sólo tienen un vértice común o un lado común. Esta partición del triángulo inicial se llama *triangulación*, los triángulos pequeños reciben el nombre de *caras* de triangulación; los lados de estos triángulos, *aristas*; y sus vértices, *vértices*.

Así, por ejemplo, la partición de la fig. 6, *a* es una triangulación, mientras que la de la fig. 6, *b* no lo es.

Lema 3 (de Sperner). *Sea la triangulación de un triángulo T. Los vértices de este triángulo están marcados con los números 1, 2 y 3. Los vértices de triangulación se numeran con estas mismas cifras ateniéndose a la siguiente condición de frontera: si el vértice de una cara cualquiera se encuentra en uno de los lados del triángulo T, ese*



a



b

Fig. 6

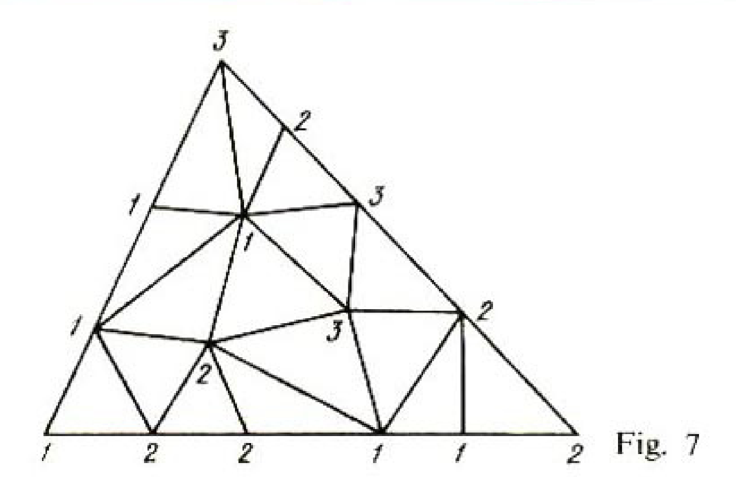


Fig. 7

vértice se numera con una de las cifras correspondientes a los vértices de dicho lado. En estas condiciones, los vértices de, por lo menos, una de las caras llevan tres marcas distintas, es decir, 1, 2 y 3. Es más, el número total de estas caras es impar.

El lema 3 se ilustra en la fig. 7. Su demostración se basa en el conocimiento del lema 2. Convengamos en llamar casa al triángulo T; habitaciones, a las caras de su triangulación; y puertas, a las aristas, pero no a todas, sino sólo a las marcadas con 1 y 2, que denominaremos aristas del tipo (1, 2). (Notemos que, a diferencia del lema 1, aquí *no diferenciamos* las aristas del tipo (1, 2) de las del tipo (2, 1). Veamos lo que en este caso debe llamarse habitación sin salida. Consideremos todos los casos posibles de distribución de las marcas 1, 2 y 3 por los vértices de las caras. Estos casos (tipos) sólo pueden ser diez: (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 2, 2), (1, 2, 3), (1, 3, 3), (2, 2, 2), (2, 2, 3), (2, 3, 3) y (3, 3, 3). Examinando esta relación se ve fácilmente que las caras del tipo (1, 2, 3), y sólo ellas, tienen exactamente una arista del tipo (1, 2) cada una, por lo que deben denominarse habitaciones sin salida. Análogamente, las caras de los tipos (1, 1, 2) y (1, 2, 2) deben llamarse habitaciones de paso, ya que precisamente ellas tienen exactamente dos aristas (1, 2). Por lo tanto, se obtiene el siguiente *vocabulario* para traducir las condiciones del lema 3 al lenguaje del lema 2:

triángulo T	–	casa,
cara de triangulación	–	habitación,
arista de triangulación tipo (1, 2)	–	puerta,

arista (1, 2) en el contorno (o dentro) del triángulo T –	puerta exterior (o interior),
cara (1, 2, 3) –	habitación sin salida,
cara tipo (1, 1, 2) o (1, 2, 2)–	habitación de paso.

Como quiera que se marquen los vértices de triangulación con los números 1, 2 y 3, por la relación anterior se ve que una cara cualquiera o carece de aristas (1, 2) o sólo tiene una o dos de estas aristas. Por consiguiente, se cumplen las condiciones del lema 2. De aquí se deduce que el número de habitaciones de paso y el número de puertas exteriores son ambos pares o ambos impares. Volviendo a pasar al lenguaje del lema 3 concluimos que también tienen la misma paridad el número de caras (1, 2, 3) y el número de aristas fronterizas (1, 2). Queda por demostrar que este último número es impar. Pero como las aristas fronterizas (1, 2) sólo se encuentran en el lado del triángulo T que tiene las marcas 1 y 2 y no pueden encontrarse en sus otros lados, la conclusión deseada se deduce directamente del lema 1. Así pues, hemos demostrado el lema 3.

El procedimiento que hemos empleado para su demostración vamos a llamarlo *método de los paseos*. En adelante, cuando lo apliquemos se podrá "pasear" directamente por las caras de triangulación sin necesidad de llamarlas habitaciones. En este caso será siempre muy importante saber lo que hay que entender por arista-puerta y por cara-habitación sin salida.

Vamos a aplicar estos razonamientos a la demostración del lema 4, análogo al lema 3 para el cuadrado. En él un cuadrado Q está dividido en pequeños cuadrados por rectas paralelas a sus lados. Para esta partición también utilizaremos las denominaciones de caras, aristas y vértices de partición, entendiendo, por ejemplo, por caras los cuadrados pequeños.

Lema 4. *Sea un cuadrado Q dividido en caras por rectas paralelas a sus lados. Los vértices del cuadrado están marcados con los números* 1, 2, 3 *y* 4. *Los vértices de partición también se numeran con estas cifras, pero de manera que se cumpla la condición de frontera siguiente: si un vértice de partición se encuentra en un lado del cuadrado Q, ese vértice recibe una de las dos marcas que figuran en los extremos de dicho lado* (fig. 8, *a*). *Entonces por lo menos una de las caras tiene como mínimo tres marcas diferentes.*

Para la demostración se divide cada una de las caras en dos triángulos (fig. 8, *b*). Entonces tenemos la triangulación del cuadrado Q cuyos vértices están numerados. Llamaremos *puerta* a la arista que tenga las marcas (1, 2), y *sin salida* al triángulo con

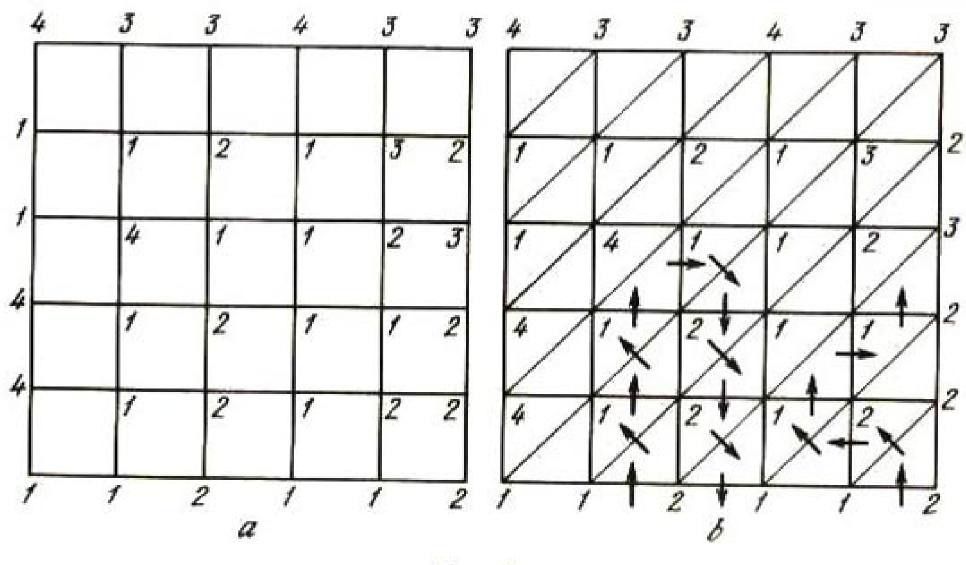


Fig. 8

tres marcas diferentes entre las cuales figuren 1 y 2. Por lo tanto, serán sin salida los triángulos de los tipos (1, 2, 3) o (1, 2, 4).

Según la condición del lema 4, todas las puertas exteriores se encuentran en el lado (1, 2) del cuadrado, y de acuerdo con el lema 1, su número es impar.

Cada paseo por las caras triangulares lo empezamos entrando al cuadrado por una puerta exterior, y lo terminamos en uno de los dos casos siguientes: cuando salimos del cuadrado por otra puerta exterior, o cuando llegamos a un triángulo sin salida (véase la fig. 8, *b*). Como el número total de puertas exteriores es impar, por lo menos uno de los paseos tiene que terminar en un triángulo sin salida. Esto significa que hay una cara triangular con las marcas (1, 2, 3) o (1, 2, 4) y, por lo tanto, una cara cuadrada con no menos de tres marcas diferentes.

PROBLEMAS

5. Demuestre el primer lema combinatorio por el método de los paseos. Para eso figúrese que el segmento es una casa en el país unidimensional Lainlandia (de las palabras inglesas *line*, línea o recta, y *land*, país). ¿Qué forma tienen aquí las habitaciones de paso, las puertas y las habitaciones sin salida?

6. Se tiene la triangulación de un cuadrado Q, como muestra la fig. 8, *b* o la 9. Cada uno de los vértices de triangulación se marca con uno de los números 1, -1, 2, -2. La condición de frontera consiste en que los vértices que se encuentran en puntos opuestos de los límites del cuadrado Q (es decir, en aquellos que pueden unirse entre sí por segmentos que pasan por el centro del cuadrado), se marcan con números opuestos (véase

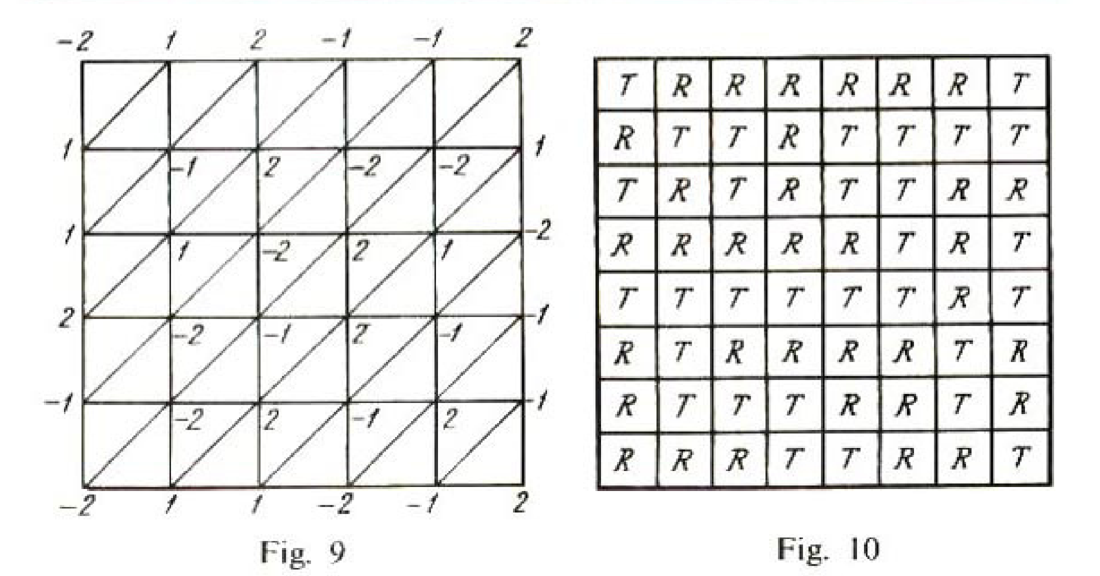


Fig. 9 Fig. 10

la fig. 9). Demuestre que existe una arista de triangulación cuyos extremos están marcados con números opuestos, es decir, una arista del tipo (1, − 1) o (2, − 2).

7. Suponga que todas las casillas de un tablero de ajedrez (de tamaño ordinario 8 × 8 o de cualquier tablero rectangular de dimensiones $m \times n$) se han repartido arbitrariamente entre el rey y la torre de tal modo que cada una de estas figuras puede moverse (según las reglas del ajedrez) sólo por sus casillas (fig. 10). Suponga también que el rey, si se encuentra en alguna de las casillas del borde izquierdo, no puede llegar al borde derecho del tablero. En este caso la torre puede pasar desde el borde inferior del tablero al borde superior. Demuéstrelo.

¿Se conservará esta afirmación si el rey se sustituye por la reina? ¿Y si son dos torres?

8. Hay un juego que se llama "hex". Al hex se juega en un tablero romboidal formado por hexágonos regulares (de aquí su nombre) (fig. 11). Por lo general, el tablero consta de 11 × 11 casillas hexagonales, pero en nuestro caso sus dimensiones pueden ser arbitrarias. Se considera que dos lados opuestos del tablero pertenecen al jugador que tiene las fichas blancas, por lo que reciben el nombre de "blancos". Los otros dos lados pertenecen al jugador que tiene las fichas negras y se llaman "negros". Las casillas de los ángulos pertenecen a los dos lados adyacentes a ellas. Los jugadores, turnándose, van poniendo sus fichas, una a una, en las casillas que aún están libres. Gana el jugador que consigue unir entre sí sus lados del tablero por medio de una fila ininterrumpida de fichas propias. Por ejemplo, en la fig. 11 han ganado las negras. Demuestre que en el juego de hex siempre gana uno de los jugadores, es decir, que en él no se pueden hacer tablas.

9. Un cuadrado Q está dividido en pequeños cuadrados (caras) por rectas paralelas a sus lados. El contorno del cuadrado Q está *orientado*, es decir, en él se indica por medio de flechas el sentido del rodeo con el cual

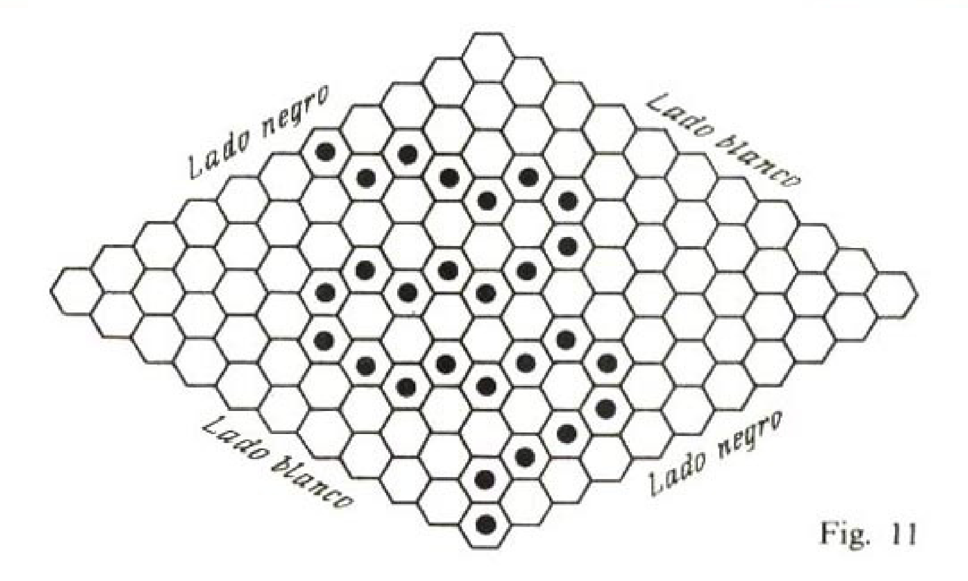


Fig. 11

los puntos interiores de Q se encuentran siempre a la izquierda (o siempre a la derecha). En cada una de las demás aristas de partición se indica una dirección, con la particularidad de que en cada vértice de partición, dentro de Q, dos aristas convergen y dos divergen (fig. 12). Demuestre que, por lo menos, hay una cara orientada (en la fig. 12 hay exactamente una, la inferior derecha).

10. Se llama *polígono* la figura plana formada por un número finito de triángulos (caras) de tal modo que: a) dos caras cualesquiera no tienen puntos comunes, o tienen común el vértice, o tienen común un lado (arista); b) desde cada vértice se puede ir a cualquier otro pasando por las aristas; c) la figura no tiene "huecos". De esta forma podemos decir que el polígono viene dado por su triangulación.

Se da el nombre de *multiplicidad* de un vértice de triangulación al número de aristas que tienen su extremo en dicho vértice. Demuestre que el número de vértices de triangulación de un polígono con multiplicidad impar, es par.

11. En el lema de Sperner se buscan las caras de triangulación marcadas con tres números distintos, por ejemplo, 0, 1 y 2. Suponga que existe una triangulación de un polígono tal que: a) cada una de sus caras tiene tres marcas distintas, 0, 1 y 2. Demuestre que en este caso: b) todas las caras de triangulación se pueden pintar, con regularidad, de dos colores (por ejemplo, blanco o negro), es decir, de manera que cada dos caras contiguas (con una arista común) tengan colores distintos. Demuestre también que de la afirmación b) se deduce la a).

12. Se tiene la triangulación de un triángulo, obtenida como sigue: cada lado del triángulo se ha dividido en m partes iguales (m es un número natural cualquiera) y por cada punto divisorio se han trazado rectas paralelas a los otros dos lados (fig. 13). Cada vértice de triangulación está pintado con uno de dos colores: rojo o azul. Demuestre que el número de aristas de triangulación "variopintas" es par.

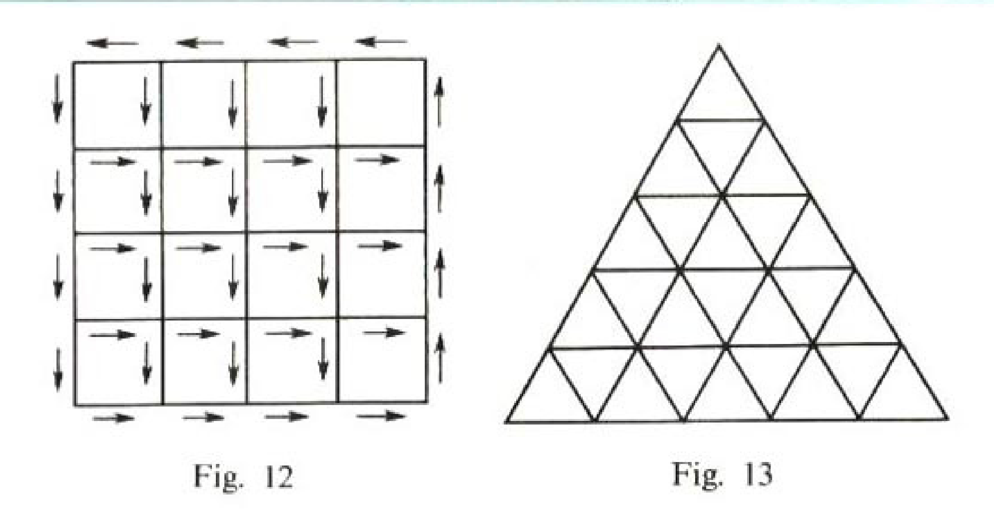


Fig. 12 Fig. 13

¿Es cierta esta afirmación para cualquier triangulación de un triángulo? Si no lo es, ¿para qué triangulaciones será entonces cierta precisamente?

§ 5. TRANSFORMACIONES CONTINUAS. HOMEOMORFISMOS. PROPIEDAD DEL PUNTO FIJO

Como ya se ha dicho antes, las transformaciones continuas son aquellas que transforman los puntos próximos en próximos. Ahora debemos precisar esta definición. La proximidad o la lejanía de los puntos se determina por la distancia entre ellos; el punto y se considera próximo (o suficientemente próximo) al punto x si la distancia entre ellos es menor que cierto número $r > 0$; todos los puntos y próximos al punto x forman, como suele decirse, su *r-entorno*. Desde el punto de vista geométrico, en el plano, este r-entorno es un círculo, salvo su circunferencia limitadora, cuyo radio es r y que tiene su centro en el punto x. En el espacio, este entorno es una esfera, salvo su superficie limitadora. Si X es un conjunto que se encuentra en un plano (por ejemplo, una recta, una circunferencia, un cuadrado, etc.) y x es uno de sus puntos, el r-entorno del punto x en el conjunto X es, por definición, el conjunto de todos los puntos de X cuya distancia a x es menor que r. Por consiguiente, este entorno es la intersección del conjunto X y un círculo de radio r (fig. 14).

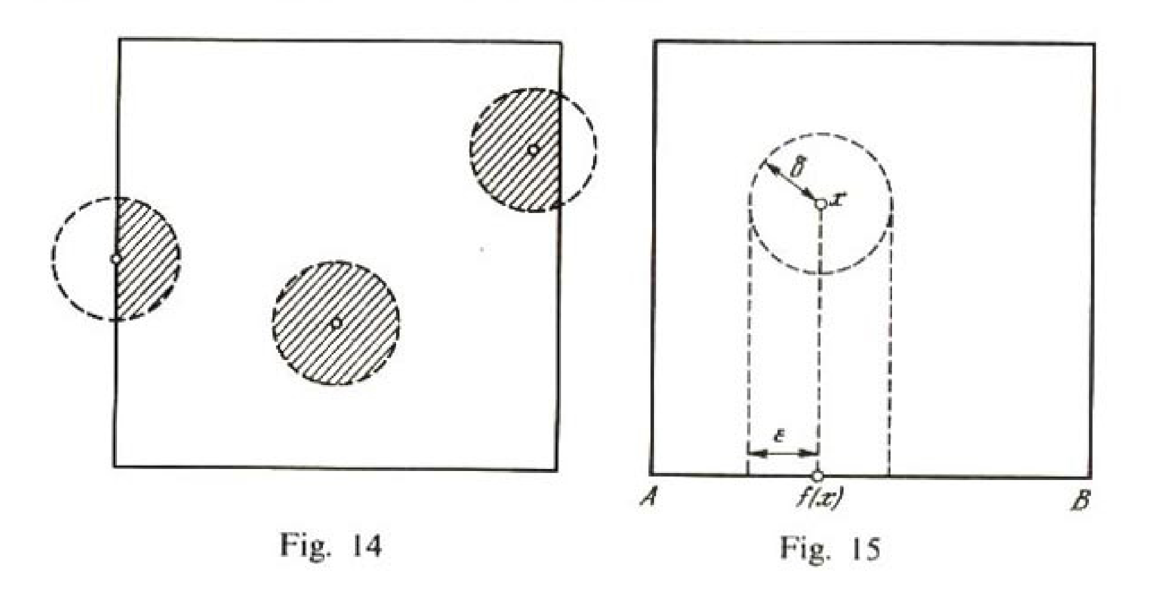


Fig. 14 Fig. 15

Sean ahora X e Y dos conjuntos (en un plano, para mayor precisión) y f, la transformación de X en Y. Por lo general esto se escribe así: $f: X \to Y$. Si x es un punto de X e $y = f(x)$, como ya sabemos, y se dice que es la *imagen* del punto x; en este caso, x se llama *preimagen* del punto y.

La transformación $f: X \to Y$ se dice que es *continua en el punto* x si para cualquier número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal, que la imagen de cada punto del δ-entorno del punto x se encuentra en el ε-entorno del punto y.

Así, la continuidad de la transformación en el punto x significa que si tomamos, no un punto cualquiera, sino un entorno cualquiera, totalmente arbitrario, del punto-imagen y, podrá encontrarse un entorno correspondiente a él y de él dependiente, del punto-preimagen x; correspondiente en el sentido de que todos los puntos del segundo entorno pasan, en la transformación, al primer entorno.

Si la transformación $f: X \to Y$ es continua en cada punto del conjunto X, se dice que la misma es continua en X o simplemente que es continua.

Ejemplo 1. La proyección de un cuadrado sobre su lado AB es la transformación que convierte cualquier punto x del cuadrado en base de la perpendicular $f(x)$ bajada desde x a AB (fig. 15). Cualquiera que sea el ε-entorno del punto $f(x)$, en él se proyecta el δ-entorno del punto x, que tiene el mismo radio. Por eso, para cualquier número $\varepsilon > 0$ se encuentra su número correspondiente $\delta > 0$ igual que ε. Por lo tanto, la proyección es continua en todas partes del cuadrado.

Ejemplo 2. Sean K_1 y K_2 dos círculos concéntricos con centro en el punto O y radios iguales, respectivamente, a r y $R > r$.

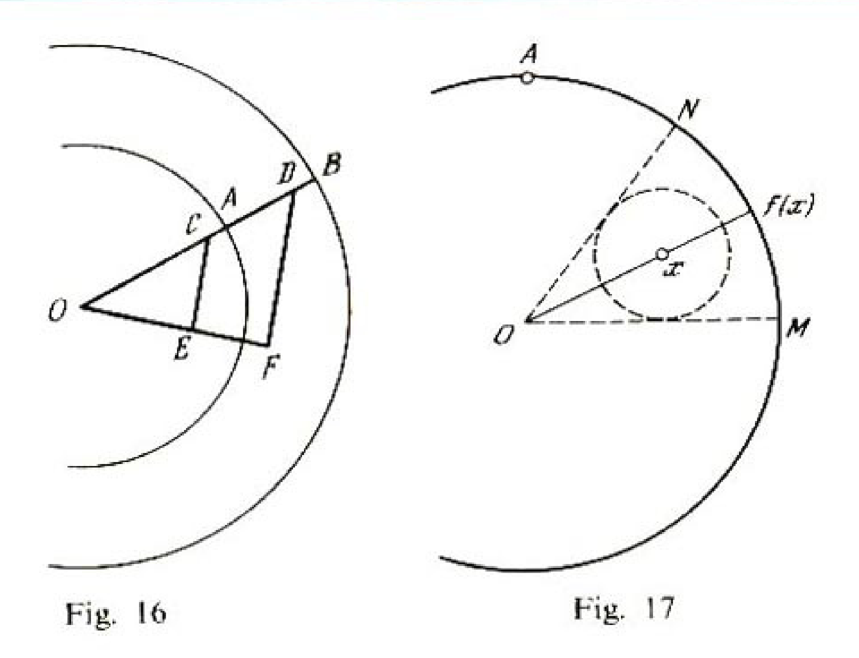


Fig. 16 Fig. 17

Vamos a determinar la transformación f: $K_1 \to K_2$ como sigue. El punto O se convierte en si mismo y cada radio OA del círculo K_1 se representa linealmente sobre el radio OB del círculo K_2 que tiene la misma dirección (fig. 16). La linealidad de la transformación significa que si el punto C pasa al D resulta que

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB}.$$

Si además de esto el punto E pasa al F, de la semejanza de los triángulos OCE y, ODF (véase la fig. 16) se deduce que la longitud del segmento CE aumenta en la transformación $\frac{R}{r}$ veces; por lo tanto, toda circunferencia, al representarse se convierte en circunferencia, y el circulo de radio δ se convierte en círculo de radio $\varepsilon = \frac{R}{r}\delta$. Es decir, por cualquier $\varepsilon > 0$ dado se halla su correspondiente $\delta = \frac{r}{R}\varepsilon$, y la transformación es continua.

Ejemplo 3. Sea K un círculo de radio R con centro en el punto O. Examinemos la proyección radial del círculo K del centro a su circunferencia de frontera C. Esta proyección se define así: si x es un punto del círculo, distinto de su centro, $f(x)$ es el punto de intersección del rayo que parte del centro O y pasa por el punto x, con la circunferencia C (fig. 17). La proyección del punto O con esto no se determina, pero nosotros suponemos adicionalmente

que el centro se proyecta, por ejemplo, en el punto más alto A de la circunferencia C. Hay que demostrar que la proyección radial es discontinua en el centro del círculo, y continua en cualquier otro de sus puntos. Tomemos un ε-entorno del punto $A = f(0)$ en la circunferencia C, tan pequeño que no coincida con la circunferencia; para eso es suficiente tomar, por ejemplo, $\varepsilon < 2R$. Entonces para este número ε no existe su correspondiente número δ: por muy pequeño que sea el δ-entorno del punto O que tomemos, los puntos de este entorno, al transformarse, se dispersan en todas las direcciones, por lo que sus imágenes no se encuentran en el ε-entorno elegido del punto O. Asi pues, en el centro del círculo la transformación es discontinua.

Sea x un punto de un círculo, distinto del centro (véase la fig. 17), $f(x)$, su imagen, y el arco MN (con los extremos excluidos), el ε-entorno del punto $f(x)$. Entonces el correspondiente δ-entorno del punto x se determina con facilidad geométricamente: para eso hay que tomar el mayor círculo posible con centro en el punto x, que se encuentre en el sector circular que se apoya en el arco MN. El radio de este círculo es igual a δ. Se puede deducir la fórmula que expresa la dependencia del número δ respecto del número ε (véase el problema 14).

La transformación f: $X \to Y$ se dice que es *biunívoca* si convierte los distintos puntos del conjunto X en puntos distintos del conjunto Y o, como suele decirse, si *no pega* los puntos de X. La transformación f: $X \to Y$ se llama *superposición* si *cada* punto del conjunto Y es la imagen de un punto (o de varios puntos) del conjunto X. Es decir, en la superposición, el conjunto X se transforma en todo el conjunto Y, y no en parte de él. A veces se dice de la superposición que es una transformación "sobre".

Para la superposición biunívoca f: $X \to Y$ se puede determinar la transformación *recíproca* f^{-1}: $Y \to X$, la cual pone cada punto y de Y en correspondencia con el punto x de X que se transforma en y en la transformación f.

La superposición biunívoca f: $X \to Y$ se llama *homeomorfismo* si ella misma es continua y la transformación recíproca f^{-1} también lo es. Los propios conjuntos X e Y se dice, en este caso, que son *homeomorfos*. Aquellas propiedades de los conjuntos que no varían en los homeomorfismos se llaman propiedades *topológicas*. De su estudio se ocupa la *topología*.

Del ejemplo 2 antes examinado se puede sacar la conclusión (¿cómo?) de que dos círculos cualesquiera son homeomorfos entre sí. Se puede probar que el círculo es homeomorfo con el cuadrado, el triángulo o cualquier polígono convexo. También

son homeomorfas entre sí las fronteras o contornos de estas figuras (la circunferencia y el contorno del cuadrado o del triángulo).

Se dice que un conjunto X *tiene propiedad de punto fijo* si *cada* transformación continua f: $X \to Y$ de este conjunto en sí mismo tiene un punto fijo. Se ve fácilmente que esta propiedad es topológica, es decir, si la tiene un conjunto X, la tiene también todo conjunto Y homeomorfo con X. Verifiquemos esto. Sea g: $X \to Y$ un homeomorfismo y f: $Y \to Y$ una transformación continua cualquiera. Examinemos la transformación $\varphi = g^{-1}fg$ del conjunto X en sí mismo. Esta transformación (llamada *composición* de las tres representaciones g, f y g^{-1}) se determina así: primero al punto x de X se aplica la transformación g, con lo que se obtiene el punto $y = g(x)$ de Y; después a y se aplica f y se obtiene el punto $f(y) = fg(x)$ de Y; finalmente se aplica g^{-1} y se obtiene el punto $g^{-1}fg(x)$ de X. Puede verificarse que la transformación φ del conjunto X en sí mismo es continua. Por lo tanto, existe un punto fijo x_0 en X. Designemos por y_0 la imagen de este punto en el homeomorfismo g: $y_0 = g(x_0)$. Entonces tenemos que

$$\varphi(x_0) = g^{-1}fg(x_0) = x_0.$$

Aplicando a los dos miembros de esta igualdad la transformación g, obtenemos

$$gg^{-1}fg(x_0) = g(x_0),$$

o bien

$$fg(x_0) = g(x_0). \tag{5.1}$$

Como quiera que tenemos $g(x_0) = y_0$, la igualdad (5.1) da $f(y_0) = y_0$, es decir, el punto y_0 es fijo.

La afirmación que acabamos de demostrar es muy importante, ya que permite demostrar la propiedad del punto fijo sólo para un representante de toda una clase de conjuntos homeomorfos entre sí. Así, por ejemplo, en el § 8 esta propiedad será demostrada para el cuadrado y, por consiguiente, también para el círculo, el triángulo y todo polígono convexo en el plano.

PROBLEMAS

13. Sean X e Y dos conjuntos (en el plano, para mayor precisión), y f, la transformación de X en Y. ¿Qué puede decirse de esta transformación si:

a) para un número cualquiera $\delta > 0$ y un número cualquiera $\varepsilon > 0$ la imagen de cada punto del δ-entorno de cierto punto x_0 se encuentra en el ε-entorno del punto $y_0 = f(x_0)$;

b) para un número cualquiera $\delta > 0$ existe un número $\varepsilon > 0$ tal, que la imagen de cada punto del δ-entorno del punto x_0 se encuentra en el ε-entorno del punto $y_0 = f(x_0)$?

14. Demuestre la continuidad de la proyección radial del círculo sobre su circunferencia de frontera en cualquier punto distinto del centro. Es decir, halle la fórmula que expresa la dependencia del número δ respecto del ε.

15. Se dice que un *segmento* $[a, b]$ *no degenera* si $a \neq b$. Demuestre que todos los segmentos que no degeneran son homeomorfos entre sí.

16. Demuestre que la composición de dos (o tres) transformaciones continuas es una aplicación continua.

§ 6.
COMPACIDAD

Sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ una sucesión de puntos que se encuentra en una recta, en un plano o en el espacio. Esta sucesión vamos a designarla abreviadamente así: $\{x_n\}$. Un *término aislado* de la sucesión cuyo número sea n lo designaremos por x_n. Se dice que la sucesión $\{x_n\}$ *converge hacia el punto* x_0 cuando el número n tiende a infinito si para un número cualquiera $\varepsilon > 0$ existe un número m tal que para todos los números $n > m$ la distancia entre los puntos x_0 y x_n es menor que ε. Esto se designa así: $x_n \to x_0$. En otras palabras, la convergencia $x_n \to x_0$ significa que cualquiera que sea el ε-entorno del punto x_0 que se tome, en él se encuentran todos los puntos de la sucesión, a partir de cierto número. Por ejemplo, la sucesión de puntos $x_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{n}$ sobre una recta converge hacia cero, ya que todos los términos de la sucesión con números impares son iguales a cero, y el término con el número par $n = 2k$ tiene la forma $x_n = \dfrac{2}{2k} = \dfrac{1}{k}$. Si se requiere que sea $\dfrac{1}{k} < \varepsilon$, obtenemos que $k > \dfrac{1}{\varepsilon}$, de donde $\dfrac{n}{2} > \dfrac{1}{\varepsilon}$ o $n > \dfrac{2}{\varepsilon}$. Así, si el número n se toma mayor que $m = \left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right] + 1$ $\left(\text{donde con corchetes se designa la parte entera del número } \dfrac{2}{\varepsilon}\right)$, el punto x_n con dicho número n se encuentra en el ε-entorno de cero. Por otra parte, la

sucesión

$$\left\{1,\ 1-\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ 1-\frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{2k-1},\ 1-\frac{1}{2k},\ldots\right\}$$

no converge hacia nada, puesto que de ella se pueden separar dos sucesiones que convergen hacia puntos distintos; a saber, la subsucesión

$$\left\{1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \ldots,\ \frac{1}{2k-1},\ldots\right\}$$

que converge hacia cero, y la subsucesión

$$\left\{1-\frac{1}{2},\ 1-\frac{1}{4},\ 1-\frac{1}{6},\ \ldots,\ 1-\frac{1}{2k},\ \ldots\right\}$$

que converge hacia la unidad.

Valiéndose de las sucesiones se define el concepto de compacidad, uno de los más importantes en topología.

El conjunto X se llama *compacto* si de una sucesión cualquiera de puntos $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ de este conjunto se puede sacar una subsucesión $\{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots\}$ convergente hacia cierto punto x_0 de este conjunto.

Por ejemplo, todo conjunto *finito* es compacto porque cualquier sucesión de sus puntos contiene una subsucesión estacionaria en la cual todos los puntos son iguales; y esta subsucesión, evidentemente, converge.

Vamos a demostrar que el segmento y el cuadrado son compactos. Estas propiedades las tienen también todos los polígonos convexos, la circunferencia, el círculo y la esfera.

Primero examinemos dos ejemplos de conjuntos no compactos. Son éstos la recta numérica **R** y su intervalo (0, 1). En efecto, de la subsucesión de los números naturales $\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ sobre **R** no es posible sacar ninguna subsucesión convergente, de donde se deduce que la recta numérica **R** no es compacta. Por otra parte, la sucesión de puntos $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ que se encuentra en el intervalo (0, 1) converge hacia cero, pero como el cero no entra en este intervalo, otra vez no se cumple la condición de compacidad.

La demostración de la compacidad del segmento se basa en el principio de los segmentos subtensos. Este principio (o cualquier otra afirmación análoga a él) se toma, por lo general, como uno de los axiomas de la recta numérica.

Principio de los segmentos subtensos. *Si una sucesión de segmentos* $\{I_0, I_1, \ldots, I_n, \ldots\}$ *es tal que cada uno de ellos se encuentra en el anterior y sus longitudes tienden a cero cuando n tiende a infinito, todos estos segmentos tienen un punto común único.*

Demostremos que el segmento $I_0 = [a, b]$ es compacto. Sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ una sucesión de puntos que se encuentra en $[a, b]$. Dividimos el segmento $[a, b]$ por la mitad. Entonces por lo menos una de sus mitades tendrá una infinidad de puntos (distintos o iguales) de la sucesión $\{x_n\}$. Llamemos I_1 a esta mitad y elijamos en ella un punto x_{n_1} de la sucesión $\{x_n\}$. El segmento I_1 también lo dividimos por la mitad y designamos por I_2 aquella de sus mitades que tiene una infinidad de puntos de la sucesión $\{x_n\}$. Elegimos en el segmento I_2 un punto x_{n_2} de la sucesión $\{x_n\}$. Procediendo así en adelante obtenemos una sucesión de segmentos $\{I_0 = [a, b], I_1, \ldots, I_k, \ldots\}$ introducidos unos en otros, tales que la longitud del segmento I_k es igual a $\dfrac{b-a}{2^k}$ y el segmento I_k contiene el punto x_n de la sucesión $\{x_n\}$. Está claro que la longitud de los segmentos I_k tiende a cero. De acuerdo con el principio de los segmentos subtensos, existe un punto único x_0 perteneciente a todos los segmentos I_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ y, en particular, al segmento $[a, b]$. Demostremos que la subsucesión de puntos $\{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots\}$, sacada de la sucesión $\{x_n\}$, converge hacia el punto x_0. Para eso tomamos un número arbitrario $\varepsilon > 0$. Entonces existe un número m tal, que la longitud del segmento I_m, igual a $\dfrac{b-a}{2^m}$, será menor que ε. Y como, además, el segmento I_m contiene el punto x_0, todo él se encontrará en el ε-entorno de este punto. Esta misma conclusión es correcta para todos los segmentos I_k con números $k \geqslant m$. Así, el ε-entorno del punto x_0 contiene todos los puntos de la sucesión $\{x_{n_k}\}$ a partir del que tiene el número n_m. Por lo tanto, la sucesión $\{x_{n_k}\}$ converge hacia el punto x_0 y la compacidad del segmento I_0 está demostrada.

Demostremos ahora la compacidad del cuadrado. Sea Q_0 un cuadrado cuyos lados son paralelos a los ejes de coordenadas Ox y Oy y tienen, para mayor precisión, una longitud igual a 1. Sea $\{p_n\}$ una sucesión arbitraria de puntos de Q_0. Dividamos Q_0 en cuatro cuadrados iguales por medio de rectas paralelas a sus lados. Sea Q_1 uno de estos cuatro cuadrados, precisamente aquel que contiene una infinidad de puntos (distintos o iguales) de la sucesión $\{p_n\}$. Elijamos uno de estos puntos y designémoslo por p_n. Procediendo así en adelante, obtenemos una sucesión de

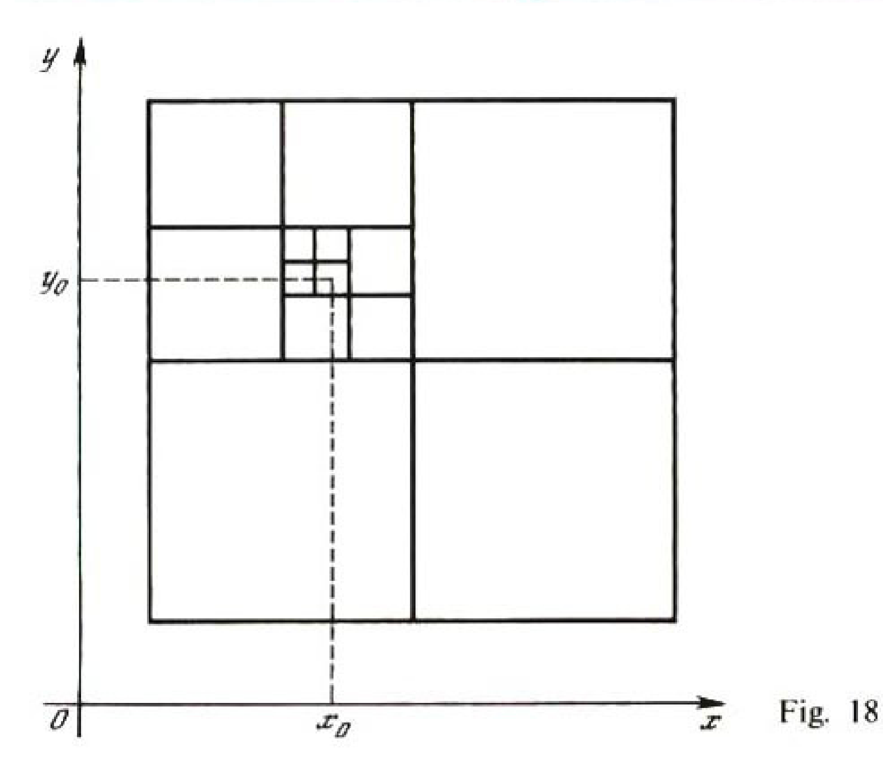


Fig. 18

cuadrados, introducidos unos en otros, $\{Q_0, Q_1, \ldots, Q_k, \ldots\}$ tales, que la longitud de los lados del cuadrado Q_k es igual a $\frac{1}{2^k}$ y Q_k contiene al punto p_{n_k} de la sucesión $\{p_n\}$ (fig. 18). Entonces las proyecciones de estos cuadrados sobre el eje Ox forman la sucesión de los segmentos subtensos $\{I_0^x, I_1^x, \ldots, I_k^x, \ldots\}$ sobre este eje. Sea x_0 el único punto común de todos estos segmentos. Supongamos después que $\{I_0^y, I_1^y, \ldots, I_k^y, \ldots\}$ es la sucesión de los segmentos subtensos sobre el eje Oy, o sea, las proyecciones de los cuadrados $\{Q_0, Q_1, \ldots, Q_k, \ldots\}$ sobre este eje, y que y_0 es el único punto común de todos estos segmentos. Damos al lector la posibilidad de que compruebe él mismo la convergencia de la subsucesión $\{p_{n_k}\}$ hacia el punto del cuadrado Q_0 cuyas coordenadas son (x_0, y_0). Con esto termina la demostración de la compacidad del cuadrado Q_0.

PROBLEMA

17. Demuestre que la función f, continua en el segmento $[a, b]$, está limitada superior e inferiormente, es decir, que existen unos números m y M tales, que $m \leqslant f(x) \leqslant M$ para cualquier punto x del segmento.

§ 7.
DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE BROUWER PARA EL SEGMENTO. TEOREMA DE LOS VALORES INTERMEDIOS. APLICACIONES

El teorema de Brouwer para el segmento fue ya enunciado en el § 1. Ahora vamos a dar su demostración utilizando el concepto exacto de continuidad "en el lenguaje ε-δ".

La idea fundamental de esta demostración consiste en que dividimos el segmento en partes y hallamos un segmento pequeño cuyos extremos, al transformarse, se desplazan en distintos sentidos. Estos desplazamientos deben ser necesariamente pequeños, ya que en el caso contrario la transformación tendría una discontinuidad. En otras palabras, el segmento pequeño hallado se puede considerar aproximadamente como un "punto" fijo. Después, el punto fijo verdadero se "halla" con exactitud valiéndose del principio de los segmentos subtensos.

Así, supongamos que existe la transformación continua de un segmento $[a, b]$ en sí mismo. Si cualquiera de los extremos del segmento $[a, b]$ permanece fijo en esta transformación, el teorema estará demostrado. Por eso vamos a considerar que ambos extremos se desplazan y que el punto a lo hace hacia la derecha, y el punto b, hacia la izquierda. Dividamos el segmento $I_0 = [a, b]$ en dos partes iguales por el punto $c = \frac{a+b}{2}$. Si el punto c es fijo, el teorema estará demostrado. Supongamos que el punto c se desplaza hacia la izquierda o hacia la derecha. Tanto en uno como en otro caso una de las mitades del segmento I_0 será tal que sus extremos, al transformarse, se desplazarán hacia dentro de ella misma. Designemos esta mitad por I_1. Repitamos este proceso dividiendo por la mitad el segmento I_1. Entonces puede ocurrir que su punto medio sea fijo o que haya una mitad I_2 del segmento I_1 cuyos extremos se desplacen hacia dentro de él mismo. Continuando así, al cabo de un número finito de pasos hallaremos el punto fijo de la transformación u obtendremos una sucesión infinita $\{I_0, I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots\}$ de segmentos subtensos, en cada uno de los cuales los extremos se desplazarán hacia dentro de él.

Supongamos que x_0 es el único punto común de todos estos

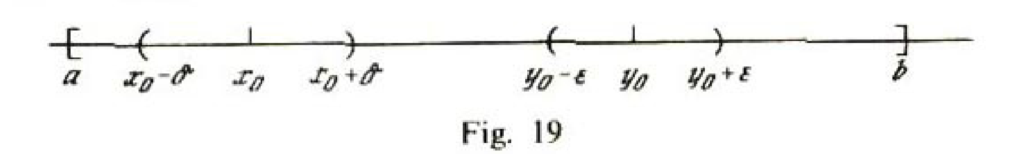


Fig. 19

segmentos. Hay que demostrar que $f(x_0) = x_0$. Esto se deduce directamente de las razones de continuidad. Más exactamente: supongamos, por el contrario, que los puntos x_0 e $y_0 = f(x_0)$ son distintos y que, para más precisión, y_0 se encuentra más a la derecha que x_0. La transformación f es continua en el punto x_0. En el lenguaje ε-δ esto significa que para cualquier ε-entorno del punto y_0 puede encontrarse un δ-entorno del punto x_0 tal que las imágenes de todos sus puntos se encuentren en el ε-entorno del punto y_0. El número $\varepsilon > 0$, igual al radio del ε-entorno, se encuentra a nuestra disposición. Lo tomamos tan pequeño que los mencionados ε y δ-entornos no tengan puntos comunes (fig. 19). En este caso todos los puntos del δ-entorno al pasar al ε-entorno se desplazan hacia la derecha. Si ahora se toma un número n suficientemente grande, el segmento I_n que tenga este número se encontrará totalmente en el δ-entorno del punto x_0 y, por lo tanto, todos sus puntos se desplazarán hacia la derecha. Esto contradice el hecho de que, como vimos, el extremo izquierdo del segmento I_n se desplaza hacia la derecha, y el derecho, hacia la izquierda. Con esto la demostración está terminada.

Como se dijo en el prólogo, la obtención de las raíces de la ecuación $f(x) = 0$ en el segmento $[a, b]$ puede reducirse a la obtención de los puntos fijos de la transformación F, en la que $F(x) = \lambda f(x) + x$. Ahora examinaremos esta cuestión con más detalle, pero antes vamos a demostrar el teorema siguiente.

Teorema (de los valores intermedios). *Si f es una función continua, dada en el segmento $[a, b]$, y tal que $f(a) < f(b)$, y si el número c satisface las desigualdades $f(a) < c < f(b)$, en el segmento habrá un punto x_0 tal que $f(x_0) = c$.*

En otras palabras, la función continua en el segmento toma todos los valores intermedios.

Este teorema vamos a demostrarlo primero para el caso particular en que $c = 0$, por consiguiente, $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. La idea de la demostración consiste en que teniendo en el segmento $[a, b]$ la función $f(x)$, construimos sobre este mismo segmento una nueva función continua $F(x) = \lambda f(x) + x$, en la que el parámetro $\lambda \neq 0$ se elige de tal forma que la función $F(x)$ sea la transformación del segmento $[a, b]$ en sí mismo. Si se hace esta elección, la función $F(x)$ tiene en este segmento un punto fijo x_0; entonces

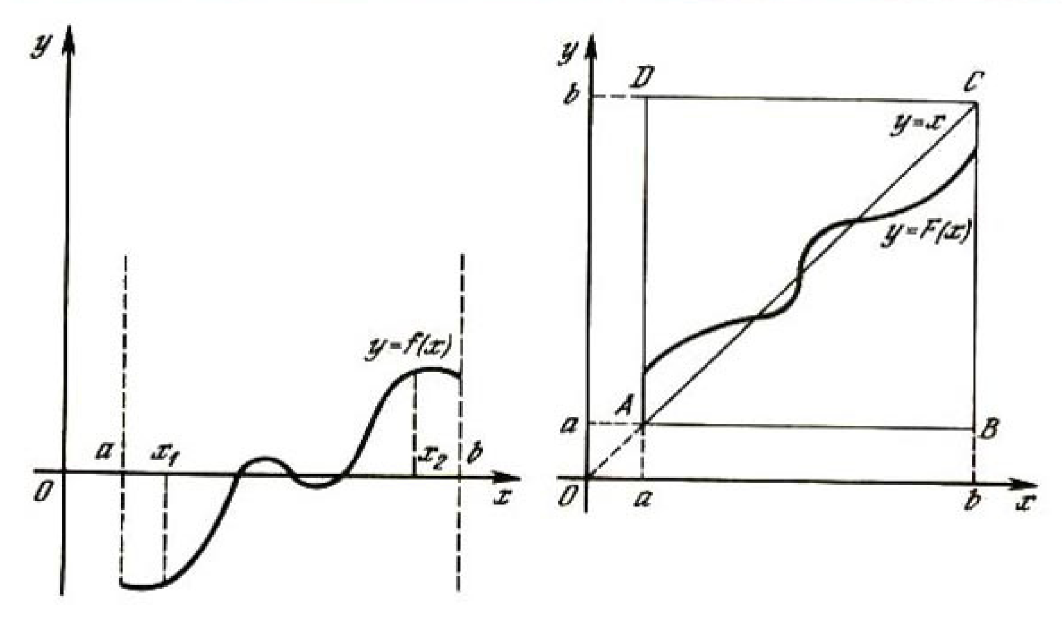


Fig. 20

$\lambda f(x_0) + x_0 = x_0$, y, por lo tanto, $f(x_0) = 0$. La elección del parámetro λ se ilustra en la fig. 20: para que la función $F(x)$ represente al segmento $[a, b]$ en sí mismo, su gráfica no debe salir de los límites del cuadrado $ABCD$, por lo que el número λ debe ser suficientemente pequeño en magnitud absoluta, es decir, la gráfica de la función $f(x)$ debe estar sometida a contracción; además, debe tomarse $\lambda < 0$, porque de lo contrario, con cualquier contracción, la gráfica $F(x)$ sale de los límites del cuadrado.

Así, todo se reduce a determinar exactamente el número λ. Esto se hace como sigue. La función continua $f(x)$ está acotada en $[a, b]$, es decir, existen unos números m y M tales que $m \leqslant f(x) \leqslant M$ para cualquier punto x de este segmento (véase el problema 17), al mismo tiempo es evidente, en nuestro caso, que $m < 0$ y $M > 0$. Y como $f(a) < 0$, en virtud de la continuidad de la función $f(x)$, tenemos que $f(x) < 0$ para todos los puntos x suficientemente próximos al punto a. Elegimos un punto x_1 tal que sea $f(x) < 0$ si $a \leqslant x \leqslant x_1$. Análogamente elegimos un punto x_2 tal que $f(x) > 0$ si $x_2 \leqslant x \leqslant b$ (véase la fig. 20). Supongamos ahora que

$$\lambda = \text{máx}\left\{\frac{a - x_1}{M}, \frac{b - x_2}{m}\right\},$$

es decir, tomamos como λ el número no menor (o sea, no mayor en magnitud absoluta) de los dos negativos $\dfrac{a - x_1}{M}$ y $\dfrac{b - x_2}{m}$.

Demostraremos ahora que en este λ será $F(x) \geqslant a$ si $a \leqslant \leqslant x \leqslant b$. Supongamos, para empezar, que el punto x es tal que $f(x) \geqslant 0$. Tomamos la desigualdad $\lambda \geqslant \frac{a - x_1}{M}$ y multiplicamos sus dos miembros por $f(x)$. Entonces $\lambda f(x) \geqslant \frac{a - x_1}{M} f(x)$ o, utilizando la desigualdad $-f(x) \geqslant -M$, obtenemos

$$F(x) = \lambda f(x) + x \geqslant \frac{a - x_1}{M} f(x) + x =$$

$$= \frac{a - x_1}{(-M)}(-f(x)) + x \geqslant \frac{a - x_1}{(-M)}(-M) + x = a - x_1 + x.$$

Como quiera que $f(x) \geqslant 0$, en virtud de la elección del punto x_1 tenemos que $x > x_1$ y, por lo tanto, $F(x) \geqslant a - x_1 + x > a$. Sea ahora el punto x tal que $f(x) < 0$. Entonces $\lambda f(x) > 0$ y, por lo tanto, $F(x) = \lambda f(x) + x > x \geqslant a$.

Demostraremos que si $a \leqslant x \leqslant b$, entonces $F(x) \leqslant b$. Supongamos, para empezar, que el punto x es tal que $f(x) \geqslant 0$. Entonces $\lambda f(x) \leqslant 0$ y, por lo tanto, $F(x) = \lambda f(x) + x \leqslant x \leqslant b$. Sea ahora el punto x tal que $f(x) < 0$. Tomamos la desigualdad $\lambda \geqslant \frac{b - x_2}{m}$ y multiplicamos sus dos miembros por $f(x)$. Entonces $\lambda f(x) \leqslant \leqslant \frac{b - x_2}{m} f(x)$ o, utilizando la desigualdad $-f(x) \leqslant -m$, se obtiene

$$F(x) = \lambda f(x) + x \leqslant \frac{b - x_2}{m} f(x) + x = \frac{b - x_2}{(-m)}(-f(x)) + x \leqslant$$

$$\leqslant \frac{b - x_2}{(-m)}(-m) + x = b - x_2 + x.$$

Como quiera que $f(x) < 0$, en virtud de la elección del punto x_2 tenemos que $x < x_2$ y, por lo tanto, $F(x) \leqslant b - x_2 + x < b$.

Así pues, la función continua $F(x)$ representa el segmento $[a, b]$ en sí mismo, por lo que en ella hay un punto fijo x_0 para el cual, por consiguiente, $f(x_0) = 0$.

En el caso en que $c \neq 0$, todos los razonamientos se conservan si en ellos la función $f(x)$ se sustituye por $f(x) - c$. En particular hay que suponer $F(x) = \lambda [f(x) - c] + x$. Damos al lector la oportunidad de hacer la demostración detallada.

El teorema de los valores intermedios es también correcto, naturalmente, en el caso en que $f(a) > f(b)$ y el número c safisfaga las desigualdades $f(a) > c > f(b)$. En este caso también puede el lector hacer la demostración.

Finalmente conviene decir que el teorema del punto fijo se deduce del teorema de los valores intermedios (problema 18).

PROBLEMAS

18. Deduzca el teorema del punto fijo para el segmento del teorema de los valores intermedios.

19. Dé una demostración del teorema de los valores intermedios, independiente del teorema del punto fijo.

20. Sea f una función continua en el segmento $[a, b]$, que represente cada uno de los extremos del segmento en sí mismo, es decir, $f(a) = a$ y $f(b) = b$. Y sea g una función continua cualquiera que represente al segmento $[a, b]$ en sí mismo. Demuestre que en este caso se encontrará en este segmento un punto x_0 tal que $f(x_0) = g(x_0)$. ¿Conserva su fuerza esta afirmación si g es una función continua arbitraria en $[a, b]$?

21. Demuestre que la transformación continua f del segmento $A = [a_1, a_2]$ en (todo) el segmento $B = [b_1, b_2]$, que contiene en sí mismo el segmento A, tiene un punto fijo. ¿Será esto justo si la imagen $f(A)$ del segmento A no coincide con B, sino que sólo se encuentra en él?

22. Sea f la transformación continua del segmento $[a, b]$ en sí mismo. Demuestre que, en este caso, la transformación $g = f^2$ (composición de la representación f consigo misma) tiene por lo menos dos puntos fijos. ¿Será esto cierto si f representa el segmento $[a, b]$ en sí mismo, pero no sobre sí?

23. La función f, dada en el segmento $[a, b]$, se dice que es *no decreciente* si de $x_1 < x_2$ se deduce $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, y *no creciente* si de $x_1 < x_2$ se deduce $f(x_1) \geqslant f(x_2)$. Demuestre que la función no decreciente (y también la no creciente) que representa al segmento en sí mismo tiene en él un punto fijo incluso si ella no es continua necesariamente.

24. Demuestre que la ecuación cúbica

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0,$$

en la que $a_0 \neq 0$ y los demás coeficientes son números reales cualesquiera, tiene por lo menos una raíz real. Es evidente que si $a_3 = 0$, el número $x = 0$ es raíz de esta ecuación. Si $x_3 \neq 0$, ¿se puede decir algo sobre si ese número tiene una raíz positiva o negativa?

He aquí algunas consecuencias del teorema de los valores intermedios. Examinemos las transformaciones continuas de la circunferencia C en la recta numérica $\mathbf{R}$. La posición del punto x sobre la circunferencia se define generalmente por medio del ángulo α formado por el radio trazado desde el centro C, con el radio dirigido hacia la derecha desde dicho centro (fig. 21). El

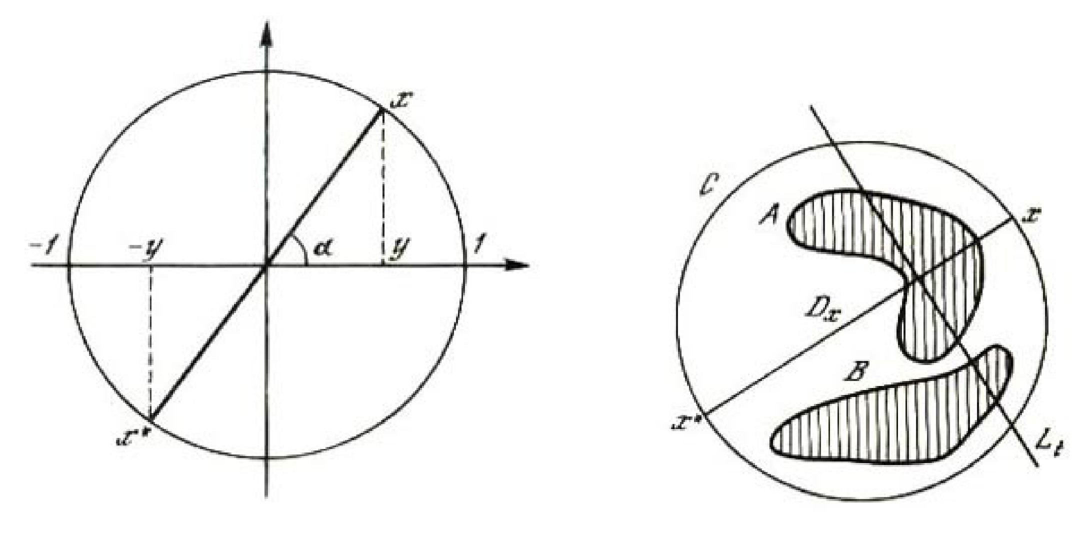


Fig. 21 Fig. 22

ángulo α se llama *coordenada angular* del punto x. El mismo se considera positivo si su sentido es contrario al de las agujas del reloj. Por ahora vamos a suponer que α varía dentro de los límites de 0 y 2π (en radianes). Dos puntos x y x^* que se encuentran en la circunferencia se dice que son *antípodas* si sus coordenadas angulares se diferencian en π (o, que es lo mismo, si la cuerda que los une es diámetro de la circunferencia).

Teorema de Borsuk – Ulam para la circunferencia *. *Si* $f: C \to \mathbf{R}$ *es una función continua sobre la circunferencia, existe un par de puntos antípodas* x y x^* *tal que* $f(x) = f(x^*)$.

Demostración. Sea C una circunferencia de radio unitario con centro en el origen de coordenadas, y α, la coordenada angular de su punto x (fig. 21). Sobre el segmento $I = [-1, 1]$ determinamos la función continua $g(y)$ como sigue. Si y es un punto sobre I, sea x el punto de intersección de la perpendicular al eje horizontal, levantada del punto y, con la semicircunferencia superior, y x^*, el antípoda del punto x. Supongamos que

$$g(y) = f(x) - f(x^*) = f(\alpha) - f(\alpha \pm \pi).$$

En los extremos del segmento I los valores de la función $g(y)$ son iguales a $g(1) = f(0) - f(\pi)$ y $g(-1) = f(\pi) - f(0)$, es decir, siempre $g(1) = -g(-1)$. Si $g(1) = 0$, todo está demostrado. En el caso contrario, por el teorema de los valores intermedios, en el segmento I se puede encontrar un punto y tal que $g(y) = 0$. Si ahora x es el punto de la circunferencia que corresponde al punto y, entonces $f(x) = f(x^*)$.

---

*) K. Borsuk (1905 – 1982), matemático polaco. S. Ulam (1909 – 1984), matemático norteamericano de origen polaco.

Consecuencia. *En un instante dado, sobre cualquier círculo máximo de la esfera terrestre (por ejemplo, sobre el ecuador) se encuentra un par de antípodas en los cuales la temperatura del aire es la misma.*

Primer teorema de las hojuelas. *Si A y B son dos figuras limitadas en un plano, existe una recta que divide cada una de estas figuras en dos partes de igual área.*

En este teorema se supone que cada figura tiene área (lo que no siempre puede ser, sino precisamente cuando la figura tiene una forma muy compleja). Está claro por qué se ha dado ese nombre a este teorema: porque afirma que dos hojuelas en un plato pueden dividirse exactamente en dos partes iguales por un solo corte de cuchillo.

Para **demostrarlo** situamos las dos figuras dentro de una circunferencia C (fig. 22) (la limitación de las figuras significa precisamente la posibilidad de esto). Para cualquier punto x que se encuentre en la circunferencia C examinemos el diámetro D_x que pasa por dicho punto. Sea L_t la perpendicular a D_x que pasa por el punto de ésta cuya distancia a x es igual a t ($0 \leqslant t \leqslant d$, aquí d es el diámetro de la circunferencia). Sea $f_1(t)$ el área de la parte de la figura A que se encuentra al mismo lado de L_t que x, y $f_2(t)$, el área de la otra parte. Las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ se dan en el segmento $[0, d]$ y ambas son continuas allí, lo mismo que su diferencia $f(t) = f_1(t) - f_2(t)$. Está claro que $f(0) = -f(d)$ y, por lo tanto, en el segmento $[0, d]$ se encuentra un punto t tal que $f(t) = 0$ ó $f_1(t) = f_2(t)$. De esta forma la recta L_t que pasa por este punto divide A en dos partes iguales. Esta misma recta divide la figura B en ciertas dos partes. Designemos por $g_1(x)$ el área de la parte de B que se encuentra más cerca del punto x, y por $g_2(x)$, el área de la otra parte. Examinemos la función $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$ que viene dada sobre la circunferencia C y es continua allí. Cuando el punto x, desplazándose continuamente por C, pasa a su antípoda x^*, las partes antedichas de la figura B cambian de sitio entre sí. Por lo tanto, $g(x) = -g(x^*)$ para todos los puntos x de la circunferencia C. Por el teorema de Borsuk - Ulam se halla un punto x en el cual $g(x) = g(x^*)$. Las dos igualdades $g(x) = -g(x^*)$ y $g(x) = g(x^*)$ dan $g(x) = 0$, es decir, en la circunferencia hay un punto x para el cual la recta L_t divide ambas figuras en dos partes iguales.

Segundo teorema de las hojuelas. *Si A es una figura limitada en un plano, existen dos rectas perpendiculares entre sí que dividen A en cuatro partes de igual área.*

Como antes, situamos A dentro de una circunferencia C. Para

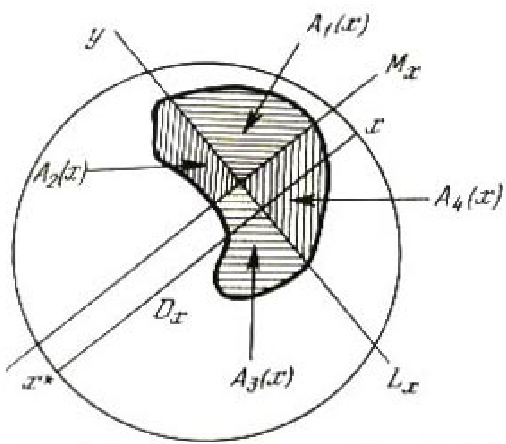


Fig. 23

cualquier punto x de C, designamos por D_x el diámetro que pasa por él y por su antípoda x^*. Sea L_x una recta perpendicular a D_x que divida A en dos partes iguales, y sea M_x otra recta que también divida A en dos partes iguales, pero paralela a D_x (la existencia de estas rectas ya se ha demostrado). Estas dos rectas dividen A en cuatro partes que nosotros, moviéndonos en sentido contrario al de las agujas del reloj, designaremos, siguiendo el orden de sucesión, por $A_1(x)$, $A_2(x)$, $A_3(x)$ y $A_4(x)$ (fig. 23). Sean $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ y $S_4(x)$, respectivamente, las áreas de estas partes. Está claro que

$$S_1(x) + S_2(x) = S_3(x) + S_4(x)$$

y

$$S_4(x) + S_1(x) = S_2(x) + S_3(x),$$

de donde tenemos que $S_1(x) = S_3(x)$, $S_2(x) = S_4(x)$.

Estas igualdades han sido obtenidas para una posición cualquiera, pero fija, del punto x. Supongamos ahora que este punto, moviéndose continuamente por la circunferencia C en sentido contrario al de las agujas del reloj, recorre un arco de $\frac{\pi}{2}$ radianes y ocupa la posición y. Entonces la parte $A_1(x)$ de la figura A pasa de un modo continuo a $A_2(x)$, ..., y la parte $A_4(x)$ pasa a $A_1(x)$. Por lo tanto, $S_1(y) = S_2(x)$ y $S_2(y) = S_3(x)$.

Supongamos que $f(x) = S_1(x) - S_2(x)$. Entonces

$$f(y) = S_1(y) - S_2(y) = S_2(x) - S_3(x) = S_2(x) - S_1(x) = -f(x).$$

Por consiguiente, cuando x recorre un arco de $\frac{\pi}{2}$ radianes, la función continua f cambia de signo. De aquí, por el procedimiento ordinario, llegamos a la conclusión de que, en cierto punto x de este arco, $f(x) = 0$. Este punto da la partición necesaria de la figura A. Con esto termina la demostración.

En los teoremas de las hojuelas no hemos verificado la continuidad de las funciones que allí se encuentran. La demostración de esa continuidad puede encontrarla el lector en el § 11 del libro [5].

Vamos a terminar este párrafo con un problema de mecánica. Sea un tren que se mueve por un tramo rectilíneo de vía entre dos estaciones. En uno de los vagones hay una barra unida al suelo por medio de una charnela. Se supone que el eje de la charnela es paralelo a los ejes del vagón. La barra se ha abandonado a sí misma y puede girar y ocupar cualquier posición entre las dos extremas de descanso: hacia adelante, según la marcha del tren, o hacia atrás. El problema consiste en lo siguiente: ¿puede dársele a la barra una posición inicial tal que durante todo el tiempo que dure la marcha del tren, ella no caiga ni toque el suelo del vagón? Veremos que la respuesta es afirmativa. Para esto no necesitamos conocer con exactitud las leyes de la dinámica ni tener en cuenta todas las fuerzas que actúan sobre la barra. Basta hacer una sola suposición de carácter físico: las posiciones finales de la barra dependen continuamente de las iniciales. En particular, si desde el principio la barra descansa en el suelo, en adelante permanecerá en esta posición de descanso.

El estado de la barra en cada instante se determina por una coordenada: el ángulo α que forma con el suelo (fig. 24). Los ángulos $\alpha = 0$ y $\alpha = \pi$ corresponden a las dos posiciones (de descanso) opuestas entre sí. La afirmación necesaria vamos a demostrarla por reducción al absurdo: suponemos que siempre, es decir, cualquiera que sea la posición inicial, la barra cae a uno u otro lado, de manera que α toma en definitiva el valor 0 ó el valor π. Nos damos en el segmento $[0, \pi]$ la función $f(\alpha)$, poniendo en correspondencia con cada posición inicial de la barra su posición final. En otras palabras, si, por ejemplo, el ángulo α tenía al principio el valor $\frac{\pi}{6}$ y la barra caía hacia la derecha, se supone que $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$. De acuerdo con nuestras suposiciones, la función $f(\alpha)$

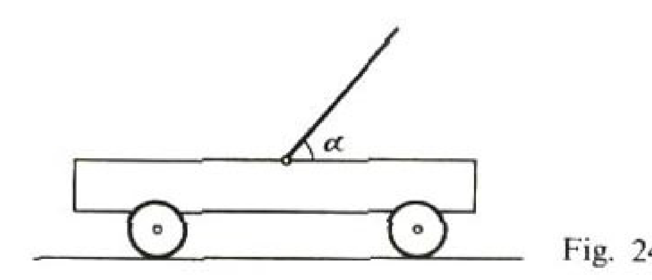


Fig. 24

es continua en el segmento $[0, \pi]$ y toma en sus extremos los valores $f(0) = 0$ y $f(\pi) = \pi$. Además, cada valor de esta función es igual a 0 ó a π. Está claro que la existencia de esta función contradice el teorema de los valores intermedios, lo que demuestra nuestra afirmación.

La demostración dada es una "demostración de existencia pura": no da indicación alguna sobre cómo hallar la posición inicial buscada de la barra. La misma observación también concierne a los problemas antes examinados de corte de las hojuelas.

PROBLEMAS

25. Demuestre que la circunferencia no es homeomorfa con la recta o con cualquier subconjunto de ella.

26. Halle el error en el razonamiento siguiente. La temperatura del aire en cualquier sitio, por ejemplo, en la ciudad de Sverdlovsk, varía con el tiempo continuamente. Observamos su variación en una hora, durante la cual el minutero del reloj da una vuelta completa a la esfera. De acuerdo con el teorema de Borsuk – Ulam existen dos instantes, distantes media hora entre sí, en los cuales la temperatura es la misma. Podemos suponer que la aguja del reloj se mueve con una velocidad cualquiera y elegir los instantes inicial y final de referencia de un modo arbitrario. Por lo tanto, *la temperatura del aire es igual en cualesquiera dos instantes*, es decir, es constante.

27. Es evidente que si una hojuela tiene forma de círculo, y la otra, forma de cuadrado, la recta que divida ambas hojuelas en dos partes iguales pasará por sus centros. ¿Vale esto para dos hojuelas cualesquiera que tengan forma de polígonos regulares?

28. Demuestre que alrededor de toda curva cerrada que se encuentre en un plano se puede circunscribir un cuadrado.

§ 8.
DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE BROUWER PARA EL CUADRADO

Vamos a dar dos demostraciones de este teorema. Cada una de ellas está calculada para "su" lector. Para aquellos que sólo *desean conocer las ideas fundamentales, sin entrar en pormenores*, se da una demostración intuitiva, pero no "rigurosa", sobre el tablero de ajedrez, tomada del libro [6, pág. 141]. Para los lectores a quienes no satisfacen los razonamientos "aproximados", la demostración se formula aplicando el "lenguaje ε-δ". No obstante, la idea fundamental es la misma en ambos casos: igual

que antes, en el caso unidimensional, buscamos un cuadrado pequeño (en vez de un segmento) en el que puntos distintos se desplazan en direcciones diferentes y, entonces, para conservar la continuidad, estos desplazamientos deben considerarse pequeños o tendentes a desaparecer por completo, lo que nos habla de la existencia de un punto fijo.

Así pues, sea la transformación continua de un cuadrado (tablero de ajedrez) en sí mismo. En esta transformación la imagen de cada punto p del cuadrado la designaremos por q. Llamaremos *rojo* a un campo del tablero si para cada punto p suyo, el punto q se encuentra más cerca del borde derecho del tablero que el mismo punto p; si para todos los puntos p de un campo sus imágenes q se encuentran más cerca del borde izquierdo del tablero que los mismos puntos p, a este campo le llamaremos *azul*; diremos que son *amarillos* los campos que no sean ni rojos ni azules. Si un punto se encuentra en el borde derecho del tablero, su imagen no puede estar más cerca de este borde que el propio punto; por eso todos los campos de la vertical extrema derecha no son rojos; análogamente, todos los campos de la vertical extrema izquierda no son azules. Un punto no se puede acercar a la vez a los bordes izquierdo y derecho; por lo tanto, los campos rojos y azules no pueden ser vecinos (los campos vecinos tienen, por lo menos, un punto común). Por consiguiente, si al rey se le prohíbe moverse por los campos amarillos, él no podrá pasar del borde izquierdo del tablero al derecho, y una torre podrá moverse desde el borde inferior del tablero hasta el superior pasando solamente por campos amarillos (véase el problema 7). De esta forma, desde el borde inferior del tablero hasta el superior se puede trazar una línea que sólo pase por campos amarillos. Esa línea es, por ejemplo, la quebrada que pasa por los centros de aquellos campos por los cuales pasó la torre.

Tomemos esa línea y de cada uno de sus puntos p tracemos una flecha (vector desplazamiento) al punto q. En el punto inicial de esta línea, que se encuentra en el borde inferior del tablero, la flecha (p, q) no puede estar dirigida hacia abajo (ni siquiera desviándose a la izquierda o a la derecha), sino que, en general, va hacia arriba. En el punto final de la línea, que se halla en el borde superior del tablero, la flecha-vector (p, q), en general, va hacia abajo. Como quiera que la dirección de la flecha cambia continuamente durante el movimiento, en la línea se encuentra un punto p_1 en el cual la flecha (p_1, q_1) está dirigida horizontalmente. Pero de la definición de campo amarillo se infiere que en el campo que contiene el punto p_1 se encuentra un punto p_2 donde la flecha

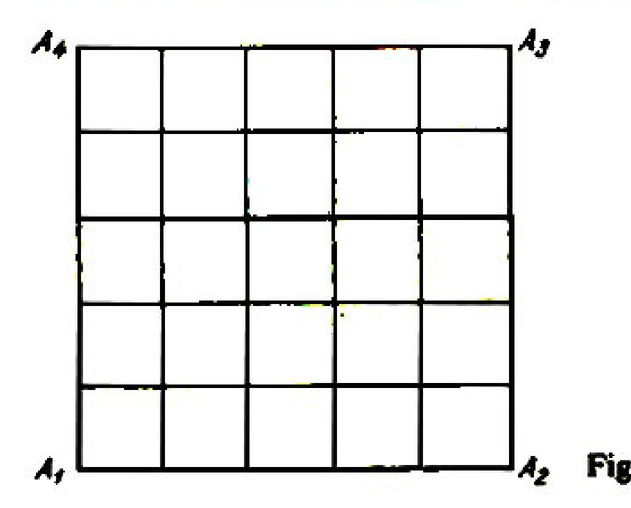


Fig. 25

(p_2, q_2) está dirigida verticalmente. Si el campo es pequeño, este salto de cambio de dirección de la flecha sólo es posible a condición de que las propias flechas sean pequeñas para todos los puntos p de este campo.

Si ahora se divide el tablero en n^2 campos y se hace que el número n tienda a infinito, en el límite se obtiene un punto p_0 en el cual la flecha (p_0, q_0) desaparece, es decir, es un punto fijo.

Pasemos a la demostración estricta. Examinemos el cuadrado $Q = A_1A_2A_3A_4$ y demostremos que toda transformación continua suya f en sí mismo tiene un punto fijo.

Supongamos que existe una partición cualquiera del cuadrado Q en pequeños cuadrados-caras por rectas paralelas a sus lados (fig. 25). Si cualquiera de los vértices de partición permanece fijo en la transformación f, el teorema está demostrado. Por eso, vamos a suponer que todos los vértices se trasladan. Cada vértice de partición lo marcamos respectivamente con uno de los números 1, 2, 3, 4. Estos se darán en dependencia de la dirección en que se desplazan los vértices y de manera que se cumplan las condiciones del lema 4 (véase la pág. 16). Más exactamente, sea p un vértice de partición; $q = f(p)$, su imagen en la transformación f; (p, q), el vector desplazamiento y φ, el ángulo que forma este vector con la dirección positiva del eje horizontal. Al vértice de partición p se le asigna la marca de acuerdo con la tabla 1 (véase también la fig. 26).

En particular, si el punto p coincide con el vértice A_1 del cuadrado Q, el ángulo φ satisface las desigualdades $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Si al mismo tiempo se cumplen las desigualdades rigurosas $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, de acuerdo con la tabla 1 damos al vértice A_1 la

marca 1. Pero si $\varphi = 0$ ó $\varphi = \frac{\pi}{2}$, los renglones primero y tercero de la tabla muestran que a este vértice se le puede asignar una de las tres marcas 1, 2 ó 4. Para satisfacer las condiciones del lema 4, de las tres marcas posibles elegimos una, la 1 precisamente. Análogamente, el vértice A_2 recibe la marca 2, el A_3, la marca 3, y el A_4, la marca 4.

Si el punto p se encuentra en el lado A_1A_2 del cuadrado Q y no coincide con sus extremos, será $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Si al mismo tiempo se cumplen las desigualdades rigurosas $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ o $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$, de acuerdo con la tabla, el punto p recibe la marca 1 ó la 2, respectivamente. Si para este punto $\varphi = 0$, de las dos marcas posibles 1 ó 4 elegimos la primera, para otra vez satisfacer las condiciones del lema 4. De un modo análogo procedemos en los casos en que $\varphi = \frac{\pi}{2}$ o $\varphi = \pi$.

Estos mismos razonamientos se aplican a los puntos que se hallan en los otros tres lados del cuadrado. Por último, a los puntos que se encuentran dentro del cuadrado se les asigna la marca sólo de acuerdo con la tabla 1, sin recurrir al lema 4.

Así, el sistema de marcas obtenido satisface las condiciones del lema 4. De este lema concluimos que en nuestra partición existe

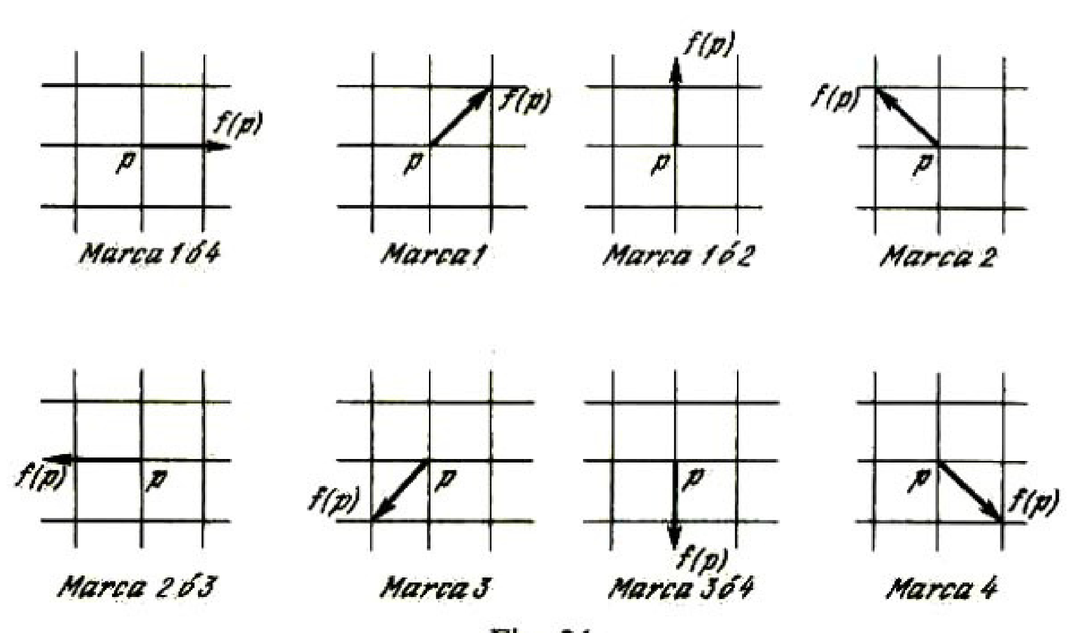


Fig. 26

Tabla 1

Ángulo	*Marca*
$\varphi = 0$	1 ó 4
$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$	1
$\varphi = \frac{\pi}{2}$	1 ó 2
$\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$	2
$\varphi = \pi$	2 ó 3
$\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$	3
$\varphi = \frac{3\pi}{2}$	3 ó 4
$\frac{3\pi}{2} < \varphi < \pi$	4

una cara cuadrada que porta, por lo menos, tres marcas diferentes.

Examinemos ahora la sucesión de las particiones $\{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n, ...\}$ del cuadrado Q. La partición τ_n con el número n se obtiene así: cada lado del cuadrado se divide en 2^n partes iguales y por los puntos divisores se hacen pasar rectas paralelas a sus lados. Está claro que la longitud de todas las aristas de partición τ_n tiende a cero cuando el número n tiende a infinito.

Supongamos que todos los vértices de cada partición τ_n *se* desplazan en la transformación f. En este caso en cada partición habrá una cara – cuadrado pequeño que tenga por lo menos tres marcas distintas. Elegimos en la partición τ_n $(n = 1, 2, ...)$ un cuadrado Q_n y suponemos que sus vértices son x_n, y_n, z_n, u_n.

Como el cuadrado Q es compacto, de la sucesión de los

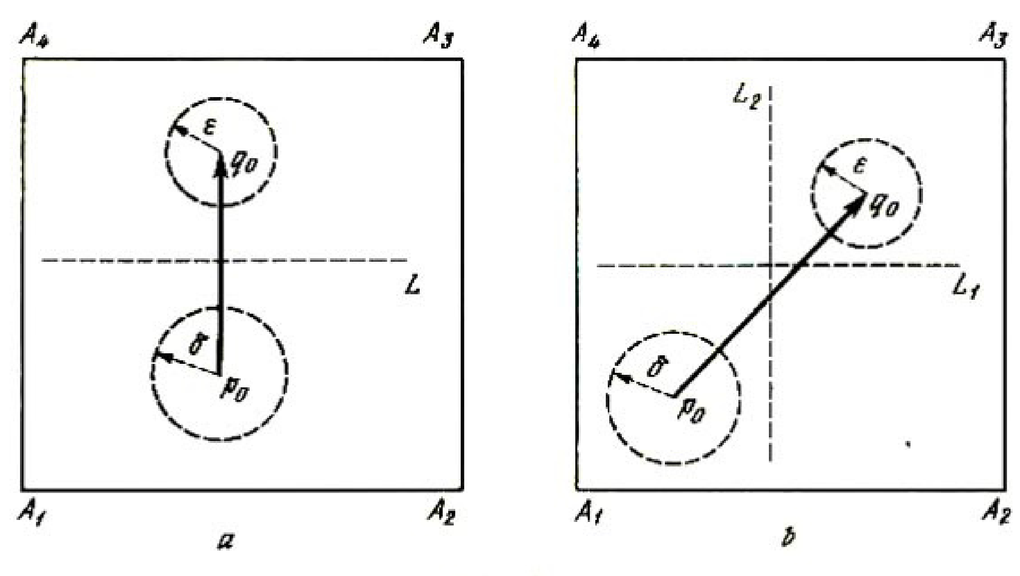


Fig. 27

puntos $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ se puede elegir la subsucesión que converge hacia el punto p_0 de Q. Lo mismo que antes, suponemos que hacia este punto converge la sucesión $\{x_n\}$ misma. Entonces hacia este mismo punto convergen además tres sucesiones: $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ y $\{u_n\}$. Esta conclusión puede sacarse porque la longitud de los lados del cuadrado Q_n tiende a cero cuando el número n tiende a infinito.

Hay que demostrar que el punto p_0 es fijo. Para eso vamos a suponer lo contrario, es decir, que los puntos p_0 y $q_0 = f(p_0)$ son distintos. Examinaremos dos casos. Primero supondremos que el punto q_0 se encuentra estrictamente más alto que el p_0, es decir, que para el punto p_0 tenemos que $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (fig. 27, *a*) (del ángulo φ para el punto p_0 se puede determinar incluso si éste no es vértice de partición). Trazamos una recta horizontal L que separe los puntos p_0 y q_0. Tomamos un ε-entorno del punto q_0 sometido a una sola condición: que no tenga puntos comunes con la recta L. En virtud de la continuidad de la transformación f en el punto p_0, existe un δ-entorno de éste tal que las imágenes de todos los puntos de este entorno se encuentran en el mencionado ε-entorno del punto q_0. Al δ-entorno hallado, del punto p_0, le imponemos otra condición: lo tomamos tan pequeño que no tenga puntos comunes con la recta L. Entonces el δ-entorno y el ε-entorno no sólo no tienen puntos comunes, sino que cada punto del ε-entorno del punto q_0 se encuentra más alto que cualquier punto del δ-entorno del punto p_0. Por eso, si p es un punto cualquiera

(por ejemplo, un vértice de partición), que se encuentra en el δ-entorno del punto p_0, y $q = f(p)$ es su imagen, el vector desplazamiento (p, q) está dirigido hacia arriba con una posible inclinación a la izquierda o a la derecha. En otras palabras, para el ángulo φ, correspondiente al punto p, son correctas las desigualdades $0 = < \varphi < \pi$. Es decir, este punto debe tener una de las dos marcas: 1 ó 2.

Por otra parte, si el número n se toma suficientemente grande, los vértices x_n, y_n, z_n, u_n del cuadrado Q_n se encuentran en el δ-entorno del punto p_0 hallado y, por lo tanto, ninguno de estos vértices puede tener marcas que no sean 1 ó 2. Resulta una contradicción, con el hecho de que los vértices de Q_n deben tener, por lo menos, tres marcas distintas.

Consideremos el segundo caso, en que el vector desplazamiento (p_0, q_0) está dirigido hacia arriba con desviación, por ejemplo, hacia la derecha, es decir, en que para el punto p_0 tenemos $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ (fig. 27, b). Ahora trazamos dos rectas, una horizontal L_1 y otra vertical L_2, de manera que cada una de ellas separe los puntos p_0 y q_0. El ε-entorno del punto q_0 y el δ-entorno del punto p_0 los elegimos igual que antes, pero les imponemos una condición adicional: que ninguno de ellos tenga puntos comunes con L_1 y L_2. Entonces, si p es un punto cualquiera del δ-entorno del punto p_0 y $q = f(p)$, para el ángulo φ correspondiente al punto p serán correctas las desigualdades $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Por lo tanto, este punto sólo puede tener una marca, la 1 precisamente.

Si ahora consideramos, en vez del punto p, los vértices de un cuadrado Q_n con número n suficientemente grande, resulta otra vez una contradicción.

Hemos examinado dos casos correspondientes a los dos primeros renglones de la tabla 1. Proponemos al lector que él mismo analice los seis casos restantes. El teorema de Brouwer para el cuadrado está demostrado.

§ 9.
MÉTODO DE ITERACIONES

Examinemos ahora el problema de la resolución aproximada de la ecuación

$$x = f(x), \tag{9.1}$$

en la que f es la transformación continua del segmento $[a, b]$ en sí mismo. En otras palabras, se trata del problema de hallar de un modo aproximado el punto fijo de la transformación. La ecuación (9.1) puede intentarse resolver como sigue. Se toma como "aproximación inicial" a la raíz un número arbitrario x_1 del segmento $[a, b]$ y se pone en el segundo miembro de la ecuación. El valor $x_2 = f(x_1)$ que se obtiene se toma como segunda aproximación a la raíz. En general, si la aproximación hallada es x_n, la aproximación siguiente x_{n+1} se determina por la fórmula $x_{n+1} = f(x_n)$.

Si la sucesión de puntos $\{x_n\}$ (llamada *sucesión iterativa*) tiene un límite x_0, el número x_0 es raíz (exacta) de la ecuación (9.1). En efecto, cuando n tiende a infinito, el primer miembro de la igualdad $x_{n+1} = f(x_n)$ tiende a x_0, y el segundo miembro, en virtud de la continuidad de la función $f(x)$, tiende a $f(x_0)$, por lo que $x_0 = f(x_0)$.

En la práctica el proceso de obtención de las *iteraciones* x_n se interrumpe, sin duda, en cierto paso finito, precisamente cuando, con un grado de exactitud dado, obtenemos la igualdad $x_n \approx n_{n+1}$. Como quiera que $x_{n+1} = f(x_n)$, esto significa que con una exactitud dada se cumple la igualdad $x_n \approx f(x_n)$, es decir, x_n es el valor aproximado de la raíz buscada.

Este procedimiento de solución aproximada de la ecuación (9.1) se llama *método de las iteraciones* o *método de las aproximaciones sucesivas*.

El método de iteraciones conviene interpretarlo geométricamente. Como ya sabemos (véase el § 1), la búsqueda de la raíz de la ecuación (9.1) no es ni más ni menos que la obtención de la abscisa del punto de intersección de la gráfica de la función $y = f(x)$ con la recta $y = x$. En la fig. 28 se muestran estas dos gráficas y la llamada *quebrada iterativa*, la cual se construye como sigue. Desde el punto x_1 del eje Ox se traza una recta vertical hasta su intersección con la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto A_1. Este punto tiene las coordenadas $(x_1, x_2) = (x_1, f(x_1))$. Desde el punto A_1 se traza una recta horizontal hasta su intersección con la recta $y = x$ en el punto B_1. Este punto tiene las coordenadas $(x_2, x_2) = (f(x_1), f(x_1)$. Desde el punto B_1 se vuelve a trazar una recta vertical hasta su intersección con la gráfica $f = f(x)$ en el punto A_2, cuyas coordenadas son $(x_2, x_3) = (x_2, f(x_2))$, y así sucesivamente. La figura muestra claramente cómo converge el proceso de iteraciones: los puntos $A_1, A_2, A_3, \ldots$ se aproximan al punto de intersección buscado, y sus abscisas $x_1, x_2, x_3, \ldots$ a la raíz de la ecuación.

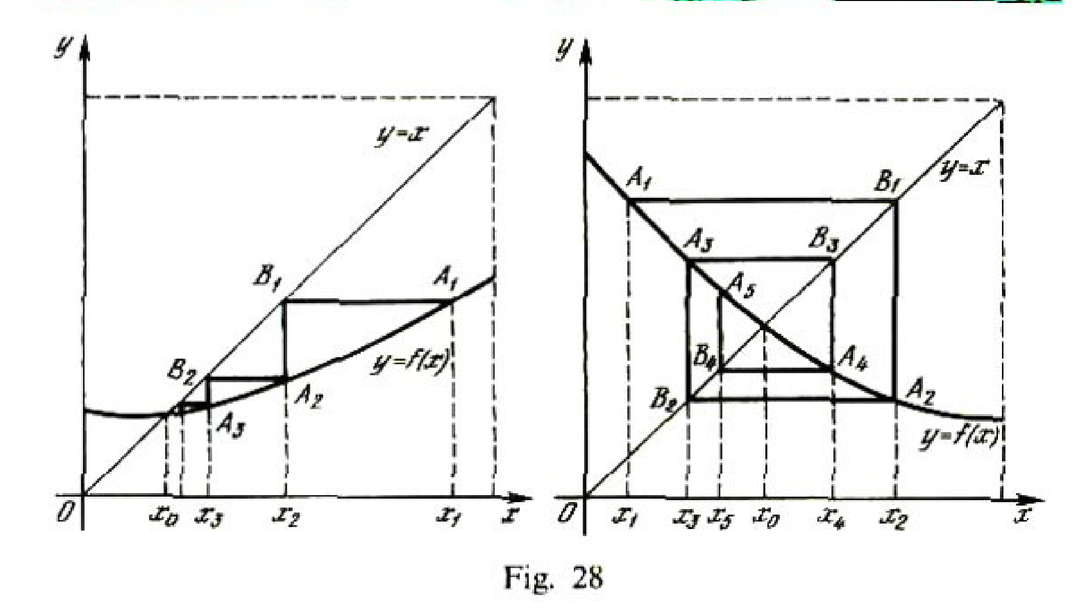


Fig. 28

Se ve fácilmente que el proceso de iteraciones no siempre converge. Consideremos, por ejemplo, la ecuación $x = f(x)$, en la que $f(x) = 1 - x$. Si como primera aproximación se toma el número $x_1 = \frac{1}{4}$, resulta que

$$x_2 = x_4 = x_6 = ... = \frac{3}{4}, \quad x_3 = x_5 = x_7 = ... = \frac{1}{4},$$

por lo que la sucesión iterativa no converge; el proceso, como suele decirse, "se ciclifica". Al lector le será fácil comprobar que, en este caso, la quebrada iterativa está formada por los cuatro lados de un cuadrado, y no tiene la forma de "escalera" o de "espiral", como en la fig. 28.

Ahora queremos indicar las condiciones suficientes para la convergencia del proceso de iteraciones. Para eso introducimos el concepto siguiente. La transformación f del segmento $[a, b]$ en sí *mismo se llama transformación o aplicación contractiva* (o simplemente *contracción*), si disminuye M veces, por lo menos, la distancia entre dos puntos cualesquiera de dicho segmento, siendo $M > 1$. Como la distancia entre los puntos x_1 y x_2 es igual a $|x_1 - x_2|$, esta condición se formula así: existe un número α tal que $0 < \alpha < 1$ y para dos puntos x_1 y x_2 cualesquiera del segmento $[a, b]$ se cumple la desigualdad

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \alpha |x_1 - x_2|. \tag{9.2}$$

El número α está ligado con el antes mencionado M por la

relación $\alpha = \frac{1}{M}$. De la desigualdad (9.2) se deduce fácilmente la continuidad de la transformación f.

Sea f una transformación contractiva del segmento $[a, b]$ en si mismo. Del teorema de los valores intermedios en forma "intensiva" (véase el problema 31) se deduce que la imagen del segmento $[a, b]$ también es un segmento $[a_1, b_1]$ que se encuentra sobre $[a, b]$. Además, los extremos del segmento $[a, b]$ no tienen que pasar *necesariamente* a los puntos a_1 y b_1; de preimágenes de estos puntos sirven ciertos puntos x_1 y x_2 del segmento $[a, b]$: $f(x_1) = a_1, f(x_2) = b_1$. Como f es una contracción, en virtud de la desigualdad (9.2),

$$|a_1 - b_1| = |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \alpha |x_1 - x_2| \leqslant \alpha |a - b|.$$

Por consiguiente, la transformación convierte el segmento $[a, b]$ en su parte $[a_1, b_1]$ cuya longitud no es mayor que $\alpha |a - b|$. Entonces el segmento $[a_1, b_1]$ se convierte también en una parte suya, o sea, en el segmento $[a_2, b_2]$ cuando

$$|a_2 - b_2| \leqslant \alpha |a_1 - b_1|.$$

Sea $[a_1, b_1], [a_2, b_2], ..., [a_n, b_n], ...$ el sistema de segmentos que se obtiene de $[a, b]$ por aplicación sucesiva de la transformación f. En este caso para un número cualquiera n tenemos que

$$|a_n - b_n| \leqslant \alpha |a_{n-1} - b_{n-1}|,$$

y, por consiguiente,

$$|a_n - b_n| \leqslant \alpha |a_{n-1} - b_{n-1}| \leqslant \alpha^2 |a_{n-2} - b_{n-2}| \leqslant ... \leqslant \alpha^n |a - b|. \tag{9.3}$$

Y como $0 < \alpha < 1$, la sucesión de números $\{a^n\}$ tiende a cero y, por eso, las longitudes de los segmentos $[a, b]$ tienden a cero cuando n tiende a infinito. Por lo tanto, existe un solo punto x_0 perteneciente a todos estos segmentos.

Si ahora x_1 es un punto cualquiera (aproximación inicial) del segmento $[a, b]$, y $\{x_n\}$ es la correspondiente sucesión iterativa, para todos los puntos $n \geqslant 2$ el punto x_n está contenido en el segmento $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ y, por lo tanto, $x_n \to x_0$. De aquí, como ya sabemos, se deduce que x_0 es raíz de la ecuación (9.1). Esta ecuación no tiene otras raíces. En efecto, si $f(x_0) = x_0$ y $f(y_0) = y_0$, de la condición de contracción

$$|x_0 - y_0| = |f(x_0) - f(y_0)| \leqslant \alpha |x_0 - y_0|.$$

Y como $\alpha < 1$, de aquí tenemos que $|x_0 - y_0| = 0$, es decir, los puntos x_0 e y_0 coinciden.

Así, si f es una transformación contractiva del segmento $[a, b]$ en sí mismo, cualquiera que sea la aproximación inicial x_1, la sucesión iterativa convergerá hacia la raíz única de la ecuación (9.1).

De un modo semejante a como se obtuvieron las desigualdades (9.3) se puede obtener la siguiente estimación del error del valor aproximado x_n de la raíz:

$$|x_n - x_0| \leqslant \alpha^n |x_1 - x_0|,$$

es decir, el error disminuye a medida que aumenta n, por lo menos con una velocidad de progresión geométrica cuya razón es α.

El método de iteraciones se examina más detalladamente en el libro [4] y en el artículo [2].

La condición de convergencia del proceso de iteraciones antes indicada da el siguiente teorema del punto fijo: *toda transformación contractiva de una recta numérica en sí misma tiene un único punto fijo* (en relación con esto véase el problema 32).

PROBLEMAS

29. Construya las sucesiones iterativas (y represente las correspondientes quebradas) para la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en el segmento $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$, tomando como aproximación inicial $x_1 = 1$ y después $x_1 = 2$.

30. Suponga que la función $f(x)$ es creciente y continua en el segmento $[a, b]$, siendo $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. Construya las quebradas iterativas tomando como aproximación inicial primero $x_1 = a$ y después $x_1 = b$. Demuestre que los procesos iterativos convergen en ambos casos (aunque f no sea necesariamente una contracción). ¿Coincidirán necesariamente las raíces construidas por estos dos procedimientos?

31. Demuestre el teorema de los valores intermedios en la forma "intensiva" siguiente. Sea $f(x)$ una función continua en el segmento $[a, b]$; A, su valor mínimo en este segmento, y B, su valor máximo en el mismo. Esto significa que $f(x) \geqslant A$ para todos los puntos x del segmento, y que existe un punto x_1 tal que $f(x_1) = A$. Análogamente, $f(x) \leqslant B$ para todos los puntos x, y existe un punto x_2 para el cual $f(x_2) = B$. Sea $A < c < B$. Entonces en el segmento $[a, b]$ hay un punto x_0 en el cual $f(x_0) = c$.

32. Sea f la transformación o aplicación contractiva de una recta numérica en sí misma. Demuestre que en este caso existe un segmento de esta recta, que se convierte en sí mismo por la transformación f.

33. ¿Puede aplicarse el método de iteraciones para resolver la

ecuación $x = \dfrac{1}{4 + x^2}$? ¿Existe algún segmento que se convierta en sí mismo por la transformación $f(x) = \dfrac{1}{4 + x^2}$?

§ 10.
RETRACCIÓN

Con la propiedad del punto fijo está íntimamente relacionado el concepto de retracción. Sea X un conjunto, e Y su subconjunto (parte). Se dice que Y es *retractor* del conjunto X si existe una transformación continua $f\colon X \to Y$ que deja fijo *cada* punto del conjunto Y o, dicho de otra forma, si es *idéntico* en Y. En este caso la propia transformación f se llama *retracción* del conjunto X en Y.

De esta forma, por ejemplo, el segmento es retractor del cuadrado (ejemplo 1), y también retractor del triángulo, de cualquier polígono convexo, del cubo, etc. Una circunferencia sirve de retractor del anillo circular comprendido entre dos circunferencias concéntricas.

La importancia del concepto de retractor se infiere del teorema siguiente.

Teorema (de la retracción). *Si un conjunto X tiene la propiedad del punto fijo e Y es retractor del conjunto X, el conjunto Y también posee la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sea $g\colon X \to Y$ una retracción y $f\colon Y \to Y$ una transformación continua cualquiera. Consideremos la composición $\psi = fg$ de estas aplicaciones (utilizando primero la transformación g, y después la f). Entonces ψ es la transformación continua del conjunto X en Y o, como Y está contenido en X, se puede considerar que ψ es la transformación continua de X en sí mismo. Por eso ψ tiene el punto fijo x_0 contenido, naturalmente, en el conjunto Y. Como en Y la aplicación g es idéntica, allí las transformaciones ψ y f coinciden. Por lo tanto, x_0 es el punto fijo de la transformación $f\colon Y \to Y$.

Como el cuadrado tiene propiedad de punto fijo, y el segmento es retractor del cuadrado, del teorema de la retracción se obtiene una nueva demostración del teorema del punto fijo para el segmento. Del mismo modo llegamos a la conclusión de que la propiedad del punto fijo la tienen todos los retractores del cuadrado, por ejemplo, el círculo, el triángulo y el cuadrado con "rabo" (fig. 29).

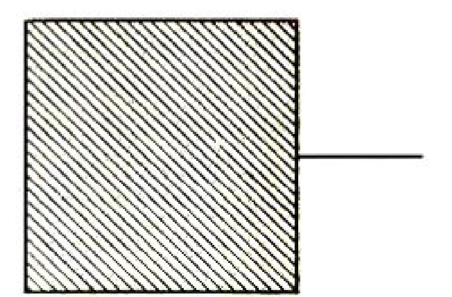


Fig. 29

Es fácil ver que la circunferencia no posee propiedad de punto fijo: al girarla, por ejemplo, a un ángulo $\frac{\pi}{2}$, todos sus puntos se desplazan. Y como el círculo tiene propiedad de punto fijo, de aquí se obtiene un corolario importante: *no existe retracción del círculo sobre su circunferencia de frontera* (compárese con el ejemplo 3).

Así, esta afirmación de la *no retracción del círculo* sobre su frontera la hemos obtenido como consecuencia del teorema del punto fijo.

Por otra parte, el teorema del punto fijo para el círculo se infiere con facilidad del teorema de la no retracción del círculo sobre su frontera.

Demostraremos esto por el método de reducción al absurdo. Supongamos que existe la transformación continua $g\colon K \to K$ del círculo en sí mismo sin puntos fijos, es decir, sea $g(p) \neq p$ para cualquier punto p de K. Para cada punto p consideraremos un rayo que una los puntos p y $g(p)$ y que esté dirigido de $g(p)$ a p. Supongamos también que $f(p)$ es el punto de intersección de este rayo con la circunferencia de frontera C (fig. 30). Entonces, haciendo que corresponda el punto p con el punto $f(p)$, obtenemos la transformación $f\colon K \to C$ que, evidentemente, deja fijos todos los puntos de la circunferencia C. Ahora, para llegar a la contradicción no nos queda más que comprobar la continuidad de la transformación f.

Para eso tomamos un número cualquiera $\varepsilon > 0$ y consideramos el ε-entorno del punto $f(p)$ (el arco) en la circunferencia C. Como la aplicación $g\colon K \to K$ es continua en el punto p, para todo número $\alpha > 0$ se encuentra un número $\delta > 0$ tal que cualquier punto del δ-entorno del punto p se convierte en esta transformación en α-entorno del punto $g(p)$. El número α lo tomamos tan pequeño que el rayo saliente de cualquiera de los puntos del α-entorno que pase por cualquier punto dependiente del número α del δ-entorno, también pase, al cortar C, por el

ε-entorno del punto $f(p)$ (véase la fig. 30). Esto significa que la transformación f es continua.

Así pues, hemos deducido el teorema del punto fijo para el círculo, del teorema de no retracción. Para fundamentar por completo esta deducción hay que dar otra demostración independiente del último teorema. Pero en esto no podemos detenernos.

Como ejemplo de aplicación del concepto de retracción vamos a volver al problema mecánico que examinamos al final del § 7. Pero ahora supondremos que el tren se mueve por una curva arbitraria en un plano, y que la charnela ordinaria de la barra se ha sustituido por una esférica, de manera que la barra puede inclinarse y caer hacia todos los lados. Como antes, vamos a demostrar que puede hallarse una posición inicial de la barra tal que ésta no caiga durante todo el tiempo que dura el movimiento del tren.

Ahora la posición de la barra se determina por dos coordenadas: el ángulo φ, que mide su desviación respecto de la posición vertical, y el ángulo α, que mide la desviación de su proyección horizontal respecto de la dirección fija en el suelo del vagón. El par de números (φ, α) conviene interpretarlo como las coordenadas polares de un punto del plano: φ es su radio vector, y α, el ángulo polar. Se ve fácilmente que en estas coordenadas tenemos las limitaciones siguientes: $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, y $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$. En otras palabras, la posición de la barra en cualquier instante viene

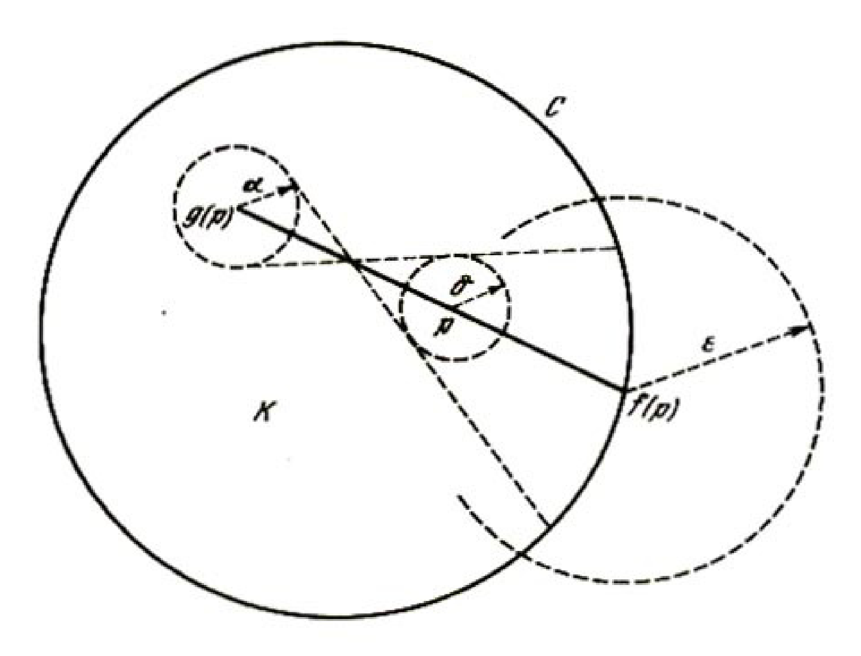


Fig. 30

determinada por un punto de un círculo de radio $\frac{\pi}{2}$ o, como suele decirse, el espacio fásico de nuestro sistema es un círculo.

Supongamos que la barra siempre cae. Después de eso sus coordenadas serán $\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right)$. Esto significa que, haciendo que cada una de sus posiciones iniciales corresponda a la respectiva posición final, determinamos la transformación continua del círculo sobre su frontera, la cual es idéntica a todo lo largo de esta última. Este hecho es consecuencia de que la barra, que desde el principio descansaba sobre el suelo, continúa en esa posición. Como quiera que esa transformación es imposible, hemos demostrado la afirmación que hacía falta.

PROBLEMAS

34. ¿Tienen la propiedad de punto fijo: a) el anillo circular; b) la figura de "ocho", es decir, el conjunto formado por dos circunferencias con un solo punto común?

35. ¿Son retracciones del cuadrado (o del círculo): a) el tríodo, es decir, la figura de la letra T; b) el *n*-odo, es decir, la figura formada por *n* segmentos que parten de un mismo punto y que, de dos en dos, no tienen más puntos comunes; c) la figura de "ocho"?

36. ¿Es el segmento retractor del a) tríodo; b) la circunferencia; c) el conjunto formado por dos segmentos sin puntos comunes?

37. ¿Es retractor del segmento un conjunto formado por dos puntos distintos?

38. ¿Es el anillo circular retractor del círculo?

39. ¿Será de nuevo compacto el retractor de un compacto?

40. ¿Existe la aplicación continua de un cuadrado en toda su frontera, no necesariamente idéntica en esta última?

41. Demuestre el teorema siguiente de los "valores intermedios" para el círculo: sea K un círculo en el plano $\mathbf{R}^2$; C, su circunferencia de frontera; $f\colon K \to \mathbf{R}^2$, la transformación continua del círculo en el plano, idéntica en la circunferencia C; entonces f "toma todos los valores en K", es decir, para cualquier punto q del círculo K hay un punto p de K, tal que $f(p) = q$.

42. Sea $f\colon K \to \mathbf{R}^2$ la misma transformación que en el problema anterior, y $g\colon K \to K$, una transformación continua cualquiera del círculo K en sí mismo. Demuestre que en el círculo K hay un punto p tal que $f(p) = g(p)$. ¿Seguirá en vigor esta afirmación si en vez de g se considera una transformación continua arbitraria del circulo K en el plano $\mathbf{R}^2$?

§ 11. TRANSFORMACIONES CONTINUAS DE LA CIRCUNFERENCIA. HOMOTOPÍA. GRADO DE TRANSFORMACIÓN.

Como sabemos, la circunferencia no tiene propiedad de punto fijo: algunas de sus transformaciones continuas en sí mismas (por ejemplo, la idéntica) tienen puntos fijos, otras (por ejemplo, el giro a un ángulo pequeño distinto de cero) no los tienen. Para figurarnos con más claridad todo el cuadro de estas transformaciones, vamos a estudiar su clasificación introducida por Brouwer. Se dice que dos representaciones continuas f y g de una circunferencia C en sí misma pertenecen a una misma clase, o que son *homotopas* entre sí, si una de ellas se puede convertir continuamente (o deformar) en la otra. Con más exactitud esto significa que existe una familia f_t: $C \to C$ de transformaciones continuas de la circunferencia C en sí misma, dependientes, y además continuamente, de un parámetro t, $0 \leqslant t \leqslant 1$ tal que $f_0 = f$ y $f_1 = g$. De esta familia se dice que es la *homotopía* que liga f y g, y de las propias transformaciones f y g se dice que son *homotopas*.

Consideremos, por ejemplo, las dos transformaciones de la fig. 31: una de ellas es idéntica y la otra tiene tres pliegues. (Las transformaciones de esta figura deben entenderse así: la circunferencia interior es el conjunto-imagen; la curva exterior, el conjunto-preimagen, y la representación consiste en la proyección de la curva exterior sobre la interior a lo largo de los radios.) Los pliegues de la segunda transformación se pueden enderezar mediante una deformación continua (véanse en la fig. 32 las posiciones sucesivas de la transformación que se deforma) y en este caso la segunda transformación se convierte, de un modo

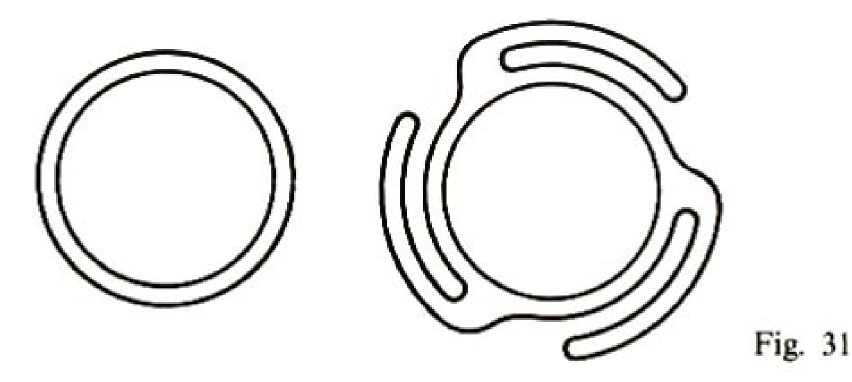


Fig. 31

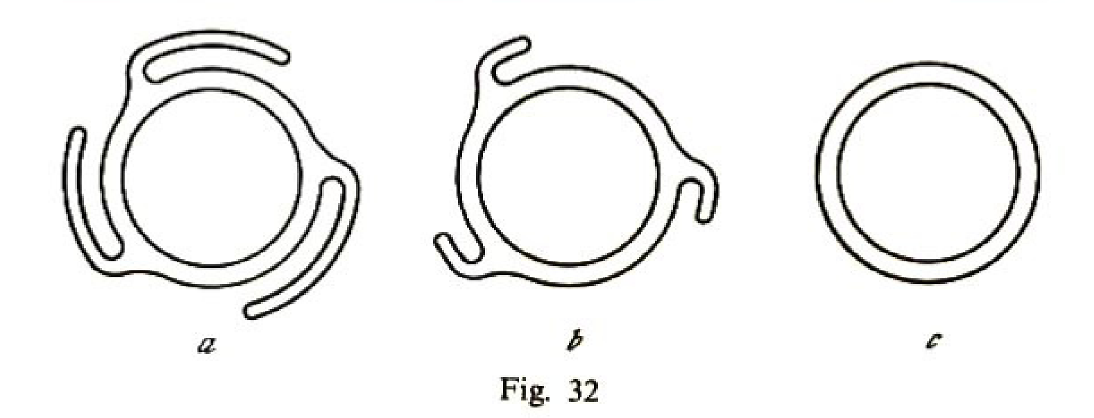


Fig. 32

continuo, en la primera. Por consiguiente, estas transformaciones pertenecen a una misma clase: son homotopas entre sí. Por otra parte, la transformación expuesta en la fig. 33, donde la circunferencia parece como si se arrollara sobre sí misma dos veces, no puede convertirse, de un modo continuo, en idéntica. Por lo tanto, estas transformaciones pertenecen a clases distintas: no son homotopas.

Como ya se dijo en el § 7, la posición de un punto x en la circunferencia se determina por su coordenada angular α. Allí se supuso que α varía desde 0 hasta 2π. Ahora ampliamos el conjunto de valores permisibles del ángulo α. Pues si el punto, después de recorrer una vez la circunferencia en sentido positivo desde $\alpha = 0$ hasta $\alpha = 2\pi$, sigue moviéndose, es de suponer que su coordenada se haga mayor que 2π. Después de recorrer dos veces la circunferencia, el ángulo α tomará el valor de 4π, luego de 6π y así sucesivamente. De manera análoga, el movimiento del punto en sentido contrario proporcionará valores negativos de su coordenada angular. Por lo tanto, a cada punto de la circunferencia le corresponde una infinidad de valores del ángulo α; todos ellos se diferencian entre sí en un número entero múltiplo de 2π.

Sea f la transformación continua de la circunferencia C en sí misma, que convierte el punto x de coordenada angular α en punto $y = f(x)$ de coordenada angular β. En este caso está claro que β es función de α: $\beta = \varphi(\alpha)$. Podemos suponer que esta última se da en el segmento $[0, 2\pi]$. Es decir, de todos los valores de la coordenada angular α elegimos aquellos que satisfacen las desigualdades $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$. En virtud de la multiplicidad de los valores de la coordenada angular β, la función $\varphi(\alpha)$ también tiene muchos valores: viene determinada salvo el sumando $2k\pi$, en el que k es un número entero. En la fig. 34 se muestra la gráfica de la función de muchos valores $\beta = \varphi(\alpha)$, correspondiente a la

transformación idéntica $y = x$ (en la figura, por comodidad, las escalas de los ejes α y β se han tomado distintas). Como puede verse, la gráfica tiene una infinidad de "ramas".

Supongamos que en el punto $\alpha_0 = 0$ del segmento $[0, 2\pi]$ hemos elegido un valor determinado de la función $\varphi(\alpha)$, por ejemplo, tal que $0 \leqslant \varphi(0) < 2\pi$ (a este convenio vamos a atenernos siempre en adelante). Supongamos que α_1 es otro punto del segmento $[0, 2\pi]$. Si el punto x se desplaza continuamente por la circunferencia, de manera que su coordenada angular varía desde 0 hasta α_1, la coordenada angular $\beta = \varphi(\alpha)$ del punto $y = f(x)$ varía continuamente, por lo que, cuando $\alpha = \alpha_1$, ella toma el valor totalmente determinado $\beta_1 = \varphi(\alpha_1)$. Por lo tanto, en el segmento $[0, 2\pi]$ se destaca una rama unívoca y continua de la función multiforme φ. Esta es la función que sobrentenderemos en adelante, cuando se trata de la función φ.

Si, en particular, α_1 toma el valor 2π, llegamos por este procedimiento a la igualdad

$$\varphi(2\pi) - \varphi(0) = 2n\pi, \tag{11.1}$$

en la que n es número entero, positivo, negativo o nulo. La igualdad (11.1) se infiere de que $\varphi(0)$ y $\varphi(2\pi)$ son las coordenadas angulares de un mismo punto en la circunferencia.

La igualdad (11.1) tiene el sentido geométrico siguiente. Cuando el punto x recorre una vez la circunferencia en sentido positivo, el punto-imagen $f(x)$ también se mueve por la circunferencia continua, pero no necesariamente de un modo uniforme. El mismo puede acelerar y retardar su movimiento, así como detenerse y moverse en sentido contrario. Pero "por último" ocupa su posición anterior de dar un número entero de vueltas por la

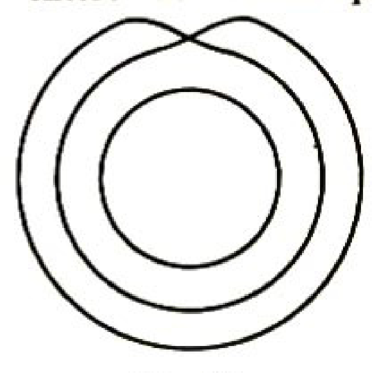


Fig. 33

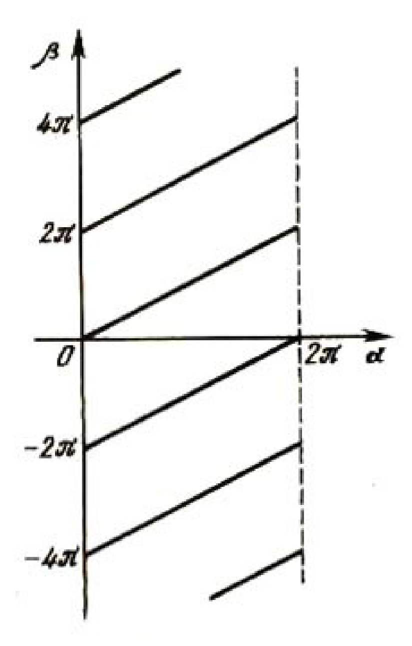


Fig. 34

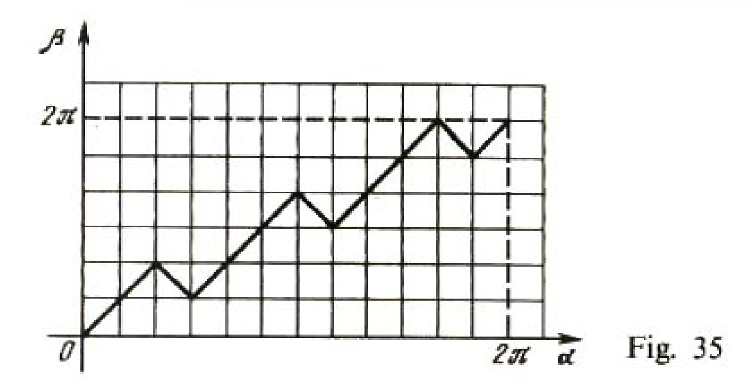


Fig. 35

circunferencia, igual a n. A este hecho es precisamente al que se refiere la relación (11.1).

El número n se llama *grado* de transformación f y se designa por $\deg f$.

Así pues, a toda transformación continua $y = f(x)$ de la circunferencia C en sí misma le corresponde una función unívoca continua $\beta = \varphi(\alpha)$ dada en el segmento $[0, 2\pi]$ y que satisface en sus extremos la condición (11.1). Y, al contrario, cada función φ de este tipo determina cierta transformación de la circunferencia en sí misma. Por ejemplo, en la fig. 35 se muestra la gráfica de la función φ correspondiente a la segunda transformación de la fig. 31.

Ahora vamos a sacar conclusiones sobre las propiedades de la transformación f partiendo de las propiedades de la función φ.

Dos funciones continuas en cualquier segmento o, dicho de otra forma, dos transformaciones continuas cualesquiera $\varphi_0(\alpha)$ y $\varphi_1(\alpha)$ de un segmento en una recta numérica son homotopas entre sí: la homotopía que las liga puede darse por medio de la fórmula

$$\varphi_t(\alpha) = (1 - t)\varphi_0(\alpha) + t\varphi_1(\alpha), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1. \qquad (11.2)$$

El parámetro t se puede considerar aquí como el tiempo durante el cual se produce la deformación, y esta misma deformación, como la traslación vertical uniforme de cada punto α de una gráfica a un punto de la otra.

A partir de esto vamos a demostrar que dos transformaciones continuas f_0 y f_1 de una circunferencia en sí misma son homotopas cuando y sólo cuando tienen grados iguales.

En efecto, si la transformación f_0 se deforma continuamente en la transformación f_1, esto mismo ocurre con las funciones $\varphi_0(\alpha)$ y $\varphi_1(\alpha)$ correspondientes a ellas, siendo las diferencias $\varphi_0(2\pi) - \varphi_0(0)$ y $\varphi_1(2\pi) - \varphi_1(0)$ iguales, ya que cada una de ellas no es más que la variación de la coordenada angular de un mismo

punto de la circunferencia. Por consiguiente, en las deformaciones continuas, el grado de transformación permanece invariable.

Y al contrario, supongamos que las transformaciones f_0 y f_1 tienen el mismo grado n. Consideremos las funciones $\varphi_0(\alpha)$ y $\varphi_1(\alpha)$ que les corresponden y liguémoslas por medio de la homotopía (11.2). Entonces toda función "intermedia" $\varphi_t(\alpha)$ satisface la igualdad (11.1):

$$\begin{aligned}
&\varphi_t(2\pi) - \varphi_t(0) = \\
&= (1 - t)\varphi_0(2\pi) + t\varphi_1(2\pi) - (1 - t)\varphi_0(0) - t\varphi_1(0) = \\
&= (1 - t)[\varphi_0(2\pi) - \varphi_0(0)] + t[\varphi_1(2\pi) - \varphi_1(0)] = \\
&\qquad\qquad = (1 - t)2n\pi + t\cdot 2n\pi = 2n\pi.
\end{aligned}$$

Esto significa que la familia de funciones $\varphi_t(\alpha)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ corresponde a la familia de transformaciones continuas f_t de la circunferencia en sí misma: cuando el parámetro t varía desde 0 hasta 1, el punto $f_t(x)$ se traslada uniformemente por el arco de circunferencia desde la posición $f_0(x)$ a la posición $f_1(x)$. Es decir, las transformaciones f_0 y f_1 son homotopas.

Así pues, el grado es una propiedad característica de toda una clase de transformaciones homotopas.

Como ejemplo consideraremos la transformación lineal f_n de una circunferencia en sí misma, dada por las relaciones

$$\varphi_n(\alpha) = n\alpha, \quad n \neq 0, \quad n \text{ es un número entero.} \qquad (11.3)$$

Su "geometría" es la siguiente: cuando el punto x, correspondiente al ángulo α, recorre la circunferencia una vez en sentido positivo, su imagen $y = f_n(x)$, correspondiente al ángulo $n\alpha$, recorre la circunferencia n veces, haciéndolo en sentido positivo si $n > 0$, y en sentido negativo cuando $n < 0$. La gráfica de la función $\varphi_n(\alpha)$ es el segmento de una recta que une los puntos cuyas coordenadas son $(0, 0)$ y $(2\pi, 2n\pi)$. Esto muestra que el grado de transformación de f_n es igual a n; por consiguiente, cuando los valores de los números m y n son distintos, las transformaciones f_m y f_n no son homotopas.

De lo dicho concluimos que todas las transformaciones continuas en sí mismas se descomponen en una infinidad de clases, una por cada número entero n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Todas las transformaciones de una clase son homotopas entre sí y tienen el mismo grado n. Una representante de esta clase es la transformación f_n determinada por la fórmula (11.3). En particular, cuando $n = 0$ la transformación (11.3) también está determinada y convierte toda la circunferencia en un punto. Esto

da la clasificación homotópica total de las transformaciones, mencionada al principio del § 11.

Vamos a demostrar que toda transformación continua f: $C \to C$ de una circunferencia en sí misma, cuyo grado sea igual a n, tiene, por lo menos, $|n-1|$ puntos fijos. Para eso consideraremos en el segmento $[0, 2\pi]$ la función $F(\alpha) = \varphi(\alpha) - \alpha$, en la que $\varphi(\alpha)$ es una rama unívoca de la coordenada angular del punto $f(x)$. De la igualdad (11.1) obtenemos

$$F(2\pi) - F(0) = 2(n-1)\pi.$$

De esta forma, si $F(0) = \varphi(0) = \beta_0$, será $F(2\pi) = \beta_0 + 2(n-1)\pi$. El segmento de la recta numérica cuyos extremos son β_0 y $\beta_0 + 2(n-1)\pi$ tiene la longitud $2\pi|n-1|$ y, por consiguiente, contiene, por lo menos, $|n-1|$ números iguales a los enteros sucesivos múltiplos de 2π. Por el teorema de los valores sucesivos en el segmento $[0, 2\pi]$ se encuentran α_i números ($i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, |n-1|$), en los cuales la función $F(\alpha)$ toma valores iguales a los números indicados, es decir,

$$F(\alpha_i) = 2\pi \cdot k_i, \quad k_i \text{ son números enteros.}$$

Por eso

$$\varphi(\alpha_i) = \alpha_i + 2\pi \cdot k_i, \quad i = 1, 2, \ldots, |n-1|.$$

La última igualdad muestra que los puntos de circunferencia C, cuyas coordenadas angulares constituyen α_i, son fijos en la representación f: $C \to C$.

El caso en que $\deg f = 1$ es excepcional: algunas transformaciones con ese grado tienen puntos fijos y otras no (en relación con esto diremos que los grados de las dos transformaciones indicadas nada más empezar el § 11 son iguales a la unidad).

PROBLEMAS

43. Demuestre que dos transformaciones continuas cualesquiera f_0 y f_1 de un segmento (y también de una circunferencia o un cuadrado) en una recta numérica son homotopas entre sí.

44. Figúrese un reloj ordinario con dos manecillas: el minutero y el horario. En cada instante, a la posición α del horario (medida, por ejemplo, en horas, dentro de los límites de 0 a 12; en grados, de 0 a 360; o en radianes, de 0 a 2π) le corresponde una posición perfectamente determinada $f(\alpha)$ del minutero. Por ejemplo, si $\alpha = 3\frac{1}{2}$ horas, será $f(\alpha) = 6$ horas, y si $\alpha = 5$ horas, será $f(\alpha) = 0 = 12$ horas. Por lo tanto, se determina la transformación continua f de la circunferencia en sí misma. Halle el grado de esta transformación y todos sus puntos fijos. ¿Se puede

determinar la transformación φ de la circunferencia en sí misma poniendo de acuerdo cada posición del minutero con la posición del horario en el mismo instante?

45. Imagínese un reloj "estropeado" en el cual: a) el minutero, a partir de las 0 horas se mueve dos veces más de prisa que el horario; b) el minutero, a partir de las 0 horas se mueve con la misma velocidad que el horario, pero en sentido contrario; c) la diferencia entre las indicaciones del minutero y el horario es igual a dos horas en todo instante. La transformación f está determinada lo mismo que en el problema 44. Halle en los tres casos el grado de esta transformación y sus puntos fijos.

§ 12.
SEGUNDA DEFINICIÓN DEL GRADO DE UNA TRANSFORMACIÓN

La teoría de las transformaciones continuas y de sus puntos fijos para la circunferencia y la esfera son análogas en mucho. En particular, para la esfera también desempeña un papel importante el concepto de grado de transformación. Pero la manera de abordar la definición que se empleó en el caso de la circunferencia, para la esfera resulta dificultoso. Por eso introduciremos otra definición (equivalente a la primera) del grado de transformación de la circunferencia en sí misma, que permite su extensión al caso de la esfera.

Esta nueva definición se basa en el cálculo del número de preimágenes de los puntos de la circunferencia y en la observación de que, para todos los puntos, este número de preimágenes, en cierto sentido ("algebraico") es el mismo.

Consideremos, por ejemplo, otra vez la transformación lineal $\beta = \varphi_n(\alpha) = n\alpha$ para $n \neq 0$. Los puntos de la circunferencia cuyas coordenadas angulares se diferencian en $\frac{k}{|n|}\cdot 2\pi$ ($k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, |n| - 1$) se convierten en esta transformación en un mismo punto. En otras palabras, cada punto de la circunferencia C tiene exactamente $|n|$ puntos-preimágenes.

Supongamos ahora que f es la *transformación lineal a trozos* de una circunferencia en sí misma, es decir, tal que la gráfica de la correspondiente función $\beta = \varphi(\alpha)$ es una línea quebrada (véase la fig. 36 en la que $\deg f = 3$). Para hallar las preimágenes de los puntos de la circunferencia cuya coordenada angular sea β_0 ($0 \leqslant \beta_0 < 2\pi$), trazamos en el dibujo las rectas horizontales

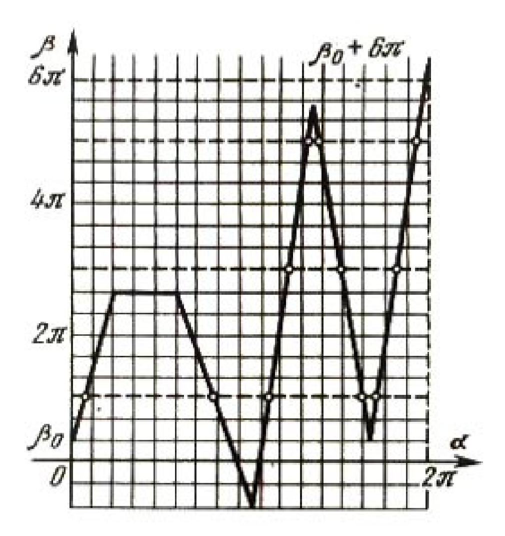


Fig. 36

$\beta = \beta_0 + 2k\pi$ $(k = 0, 1, \ldots, |n| - 1)$ y hallamos sus puntos de intersección con la gráfica $\beta = \varphi(\alpha)$. En la fig. 36 hay once puntos de este tipo. Ahora atribuimos a cada punto de intersección un signo: positivo, si en él aumenta la función $\varphi(\alpha)$, y negativo, si ésta decrece. Contando, por ejemplo, el número de preimágenes de ángulo $\beta_0 = \pi$, teniendo en cuenta esta regla, obtenemos $7 - 4 = 3$ preimágenes, o sea, tantas como requiere el grado de transformación.

Conviene advertir que los puntos en los cuales la gráfica de la función $\varphi(\alpha)$ es tangente a las rectas horizontales (es decir, los puntos angulares de la gráfica), o la propia gráfica tiene trozos horizontales, no fueron estimados al calcular el número de preimágenes. Pero se puede proceder de otra forma: a cada uno de estos puntos se le atribuyen dos signos a la vez (uno positivo y otro negativo); está claro que con esto la suma algebraica de los números de imágenes no varía.

En general, si se toma cualquier transformación lineal a trozos de una circunferencia en sí misma, el número de preimágenes (teniendo en cuenta sus signos) será igual para todos los puntos. Como hemos visto, esto es así realmente para la transformación lineal $\varphi_n(\alpha) = n\alpha$, $n \neq 0$. Cada transformación lineal a trozos se puede obtener de la deformación lineal continua (homotopia). Además, en algunos puntos pueden aparecer y desaparecer las preimágenes, pero siempre sólo a pares y teniendo, una de las preimágenes del par, signo más, y la otra, signo menos. Por eso el número de preimágenes de cualquier punto permanece invariable e igual precisamente al grado de transformación en el sentido de su primera definición.

Así hemos llegado a su segunda definición: *el grado de transformación lineal por trozos de una circunferencia* en sí misma

es el número de preimágenes de cualquiera de sus puntos teniendo en cuenta sus signos.

Si se tiene una transformación continua arbitraria f de una circunferencia en sí misma, son posibles los puntos con infinidad de preimágenes, por lo que la definición dada del grado no sirve para estas transformaciones. Por lo general, en este caso la transformación f se sustituye por una transformación lineal a trozos g, próxima y poco distinta de ella, para la cual deg g ya ha sido determinada. Se podría demostrar que todas las transformaciones lineales a trozos g, próximas a f, tienen un mismo valor del grado. Este valor es el que se toma como *grado* de transformación f.

PROBLEMA

46. Supongamos que se tiene la triangulación de un cuadrado, en la cual cada uno de los vértices está marcado con uno de los números 0, 1 y 2, y un triángulo (sin triangulación) cuyos vértices llevan esas mismas tres marcas. En este caso se puede determinar la transformación lineal a trozos de la frontera del cuadrado en la frontera del triángulo, del modo siguiente: si una arista de triangulación que se halla en la frontera del cuadrado tiene las marcas 0 y 1, la transformamos linealmente en el lado del triángulo que lleva esas mismas marcas; si ambos extremos de esta arista tienen la marca 0, la convertimos en el vértice del triángulo que tiene esa misma marca; análogamente se procede con todas las demás marcas. Demuestre la siguiente extensión del lema de Sperner: si el grado de esta transformación es distinto de cero, en la triangulación del cuadrado habrá una cara con tres marcas distintas. Aquí, en vez del cuadrado se puede tomar cualquier polígono convexo.

§ 13. TRANSFORMACIONES CONTINUAS DE LA ESFERA

Ahora podemos pasar a la transformación de la esfera S. Se da el nombre de *circunferencia máxima* en S a la línea de intersección de la esfera con un plano que pasa por su centro. La *triangulación* de la esfera es su partición en triángulos esféricos-caras observando las condiciones ordinarias de disposición mutua (véase el principio del § 4). Los lados de estos triángulos son siempre arcos de curcunferencias máximas. En la fig. 37 se muestran dos triangulaciones de la esfera, obtenidas por

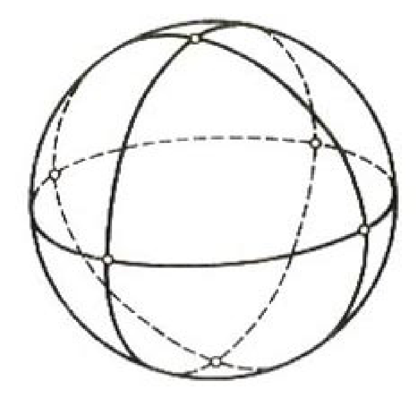
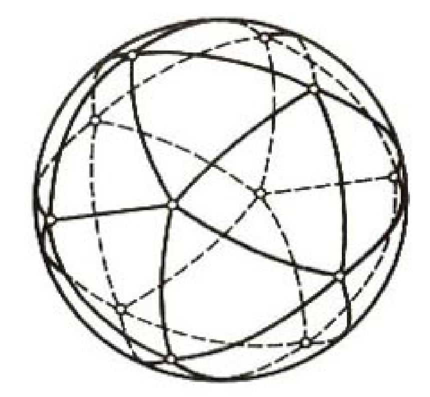



Fig. 37

proyección central sobre ella de todas las caras de un octaedro y un icosaedro regulares.

A veces nos convendrá figurarnos la esfera "realizada" topológicamente en forma de superficie de un poliedro convexo fijado cualquiera, por ejemplo, de un octaedro (fig. 38). La esfera S y esta superficie son, claro está, homeoformes entre sí, pero nosotros las consideraremos simplemente "idénticas". Las caras del octaedro estarán trianguladas en triángulos más pequeños. A este punto de vista nos atendremos al considerar las transformaciones lineales a trozos.

Supongamos que existen dos triangulaciones de la esfera S, distintas en general. La transformación continua de la esfera en sí misma se llama *lineal a trozos* si cada triángulo (cara de primera triangulación) se transforma linealmente *) en cierto triángulo (cara de segunda triangulación), en uno de sus lados (arista de triangulación) o en su vértice.

La esfera se *orienta* como sigue. Si un punto se mueve sobre ella por una circunferencia menor (o por la frontera de una cara triangular cualquiera) y el observador se encuentra fuera de la esfera y del mismo lado, respecto a su centro, que la circunferencia, el movimiento del punto será positivo si el observador lo percibe en sentido contrario al de las agujas del reloj.

Sea ABC una cara de triangulación de la esfera, y la transformación lineal a trozos f la convierte en la cara $A_1B_1C_1$ de otra triangulación, siendo $f(A) = A_1$, $f(B) = B_1$ y $f(C) = C_1$.

*) La transformación lineal de un triángulo en otro se puede determinar por medio de dos funciones lineales de dos variables o como una transformación que conserva las coordenadas baricéntricas (sobre estas coordenadas consulte el libro [1]).

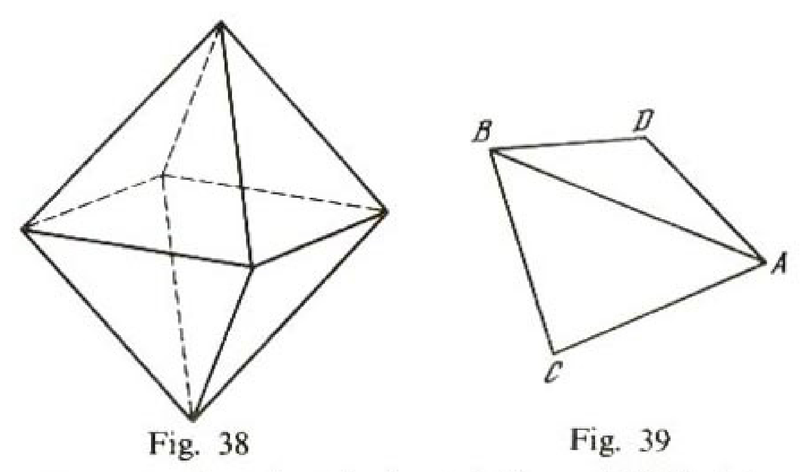


Fig. 38 Fig. 39

Supongamos que el orden de los vértices $ABCA$ determina la dirección positiva del recorrido por la frontera de la cara ABC. Llamaremos *positiva* a esta cara si su orientación en la transformación f se conserva, es decir, si el sentido $A_1B_1C_1A_1$ del recorrido de la frontera del triángulo $A_1B_1C_1$ también es positivo. Diremos que la cara ABC es *negativa* si su orientación se convierte en transformación.

Tenemos la transformación arbitraria lineal por trozos de cierta triangulación de una esfera en otra. Tomamos una cara cualquiera de segunda triangulación y calculamos la diferencia entre los números positivos y negativos de las caras de primera triangulación transformadas en ella (o, más brevemente, el número de preimágenes de esas caras teniendo en cuenta sus signos). Resulta que *esta diferencia es igual para todas las caras de segunda triangulación*. Su valor común se llama *grado* de transformación lineal a trozos.

Vamos a demostrar la afirmación enunciada (*teorema del grado*) por el método de paseos por las caras. Para eso tomaremos dos caras contiguas ABC y ADB de segunda triangulación (fig. 39, donde se muestra su vista "desde el exterior" de la esfera) y demostraremos que para ellas el número de preimágenes, teniendo en cuentas sus signos, es el mismo.

Directamente de la definición de transformación lineal por trozos se obtiene la siguiente afirmación. Si en la primera triangulación se toma una cara cualquiera F_1, transformada en ABC, en esta triangulación se encuentra una cadena de caras F_1, F_2, ..., F_{k-1}, F_k que tiene las propiedades siguientes: 1) cada dos caras con números vecinos tienen una arista común, 2) la última cara F_k se transforma en ABC o en ADB, 3) cada una de las caras intermedias F_2, ..., F_{k-1} (que, por otra parte, pueden estar ausentes) se transforma en arista AB.

Esta cadena se muestra en la fig. 40, *a*; las letras A, B y C, que

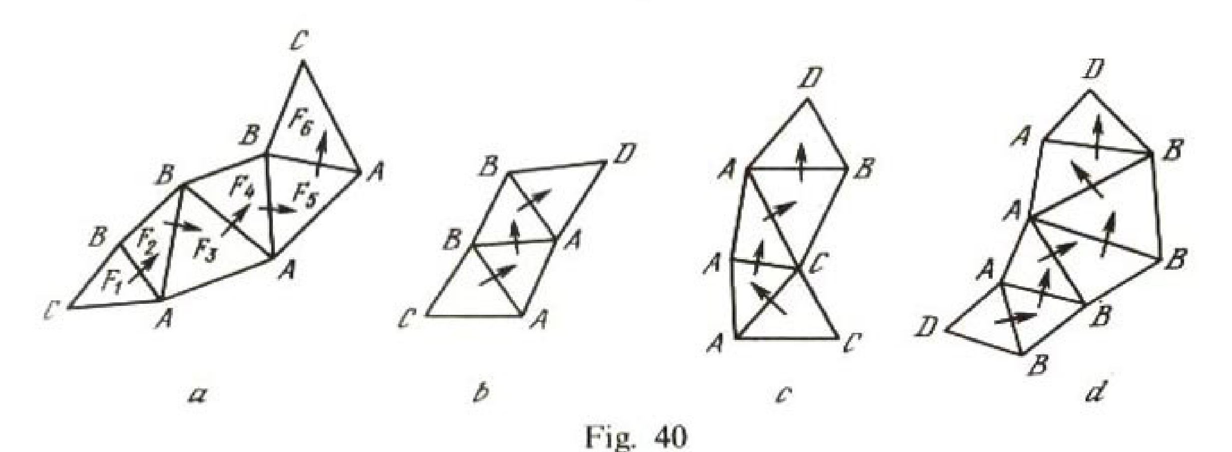


Fig. 40

se encuentran en esta figura en los vértices de las caras, indican sus imágenes; dicho de otra forma, cada vértice señalado con la letra A se convierte en un vértice con la misma marca en la fig. 39, y análogamente para las demás letras. Si la cara F_1 se transforma en ABC conservando la orientación (es decir, si F_1 es positiva), la cara F_k se transforma en ABC necesariamente ya con la orientación inversa (la cara F_k es negativa). Esto se ve bien en la fig. 40, *a*. Por eso decimos que la cadena de caras desde F_1 hasta F_k es el camino desde $+ABC$ hasta $-ABC$. En general, si se construye esta cadena desde cada cara de primera triangulación que se convierte en ABC o en ADB, se obtienen los cuatro tipos de recorridos siguientes:

de $+ABC$ a $-ABC$,
de $+ABC$ a $+ADB$,
de $-ABC$ a $-ADB$,
de $+ADB$ a $-ADB$

(véase la fig. 40). Designamos por m, n, p y q el número de recorridos de los tipos primero, segundo, tercero y cuarto, respectivamente. En este caso el número de preimágenes de la cara ABC, teniendo en cuenta los signos, es igual a $m - m + n - p = n - p$; para la cara ADB ese número es igual a $n - p + q - q = n - p$. Como puede verse, estos números son iguales; por lo tanto, el teorema del grado está demostrado para los pares de caras de segunda triangulación con una arista común. Luego, por el mismo procedimiento se puede verificar esta afirmación para los pares de caras ADB y AED con la arista común AD, y así sucesivamente.

Para determinar el grado de transformación continua arbitraria de la esfera $f\colon S \to S$, lo mismo que en el caso de la circunferencia, hay que sustituirla por una transformación lineal

por trozos g próxima a ella, calcular deg g y cerciorarse de que cualesquiera dos de estas aproximaciones g_1 y g_2 conducen a un mismo valor del grado. Este valor, por definición, se toma como *grado* de transformación f.

En calidad de ejemplo sencillo, que inmediatamente vamos a utilizar, indicaremos que la transformación *idéntica* de una esfera que deja todos los puntos fijos, tiene el grado 1. Por otra parte, consideremos la transformación *antípoda* que convierte cada punto x en su antípoda x^* diametralmente opuesto al primero. Esta transformación invierte la orientación de la esfera (fig. 41), y su grado es -1. Pero en la circunferencia, a diferencia de la esfera, la transformación antípoda conserva la orientación y tiene el grado 1.

Lema 5. *Sean f y g dos transformaciones continuas de una esfera en sí misma, tales que cualquiera que sea un punto x en la esfera, sus imágenes $f(x)$ y $g(x)$ no son antípodas: $f(x) \neq [g(x)]^*$. En este caso f y g son homotopas y tienen el mismo grado:* $\deg f = \deg g$.

En efecto, como los puntos $f(x)$ y $g(x)$ no son antípodas, para ellos hay un arco de circunferencia mayor, determinado unívocamente, que une estos puntos y cuya longitud es menor que la de la semicircunferencia. Por eso, si se hace que el punto $f(x)$ se desplace por ese arco (uniformemente respecto de todos los x) al punto $g(x)$, se obtiene la homotopía que liga las transformaciones f y g. Cuando la transformación se deforma continuamente, su grado también cambia continuamente. Pero como el grado es siempre un número entero, en este caso el mismo debe permanecer constante.

El lema 5 también es válido para la circunferencia.

Teorema de los puntos fijos para la esfera. *Toda transformación continua f de una esfera S en sí misma tiene un punto fijo o convierte cierto punto en su antípoda. Si con esto* $\deg f \neq -1$, *se tiene necesariamente un punto fijo, y si* $\deg f \neq 1$, *algún punto de la esfera se convierte necesariamente en su antípoda.*

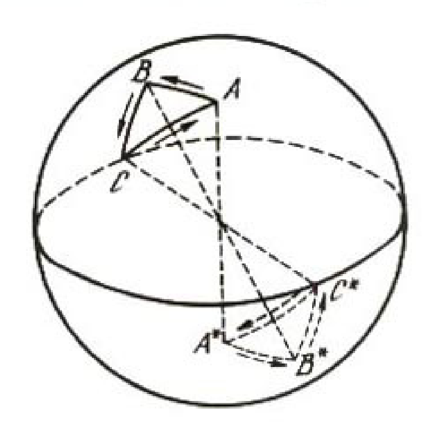


Fig. 41

Supongamos primero que deg $f \neq -1$ y demostremos, por reducción al absurdo, que hay un punto fijo. Si éste no existiera podría aplicarse el lema 5 a la transformación f y a la transformación antípoda $g(x) = x^*$. Y como deg $g = -1$, se tendría que deg $f = -1$, lo que es imposible.

Sea deg $f \neq 1$ y $f(x) = x^*$ para todos los puntos x de la esfera S. Aplicando el lema 5 a la transformación f dada y a la transformación idéntica $g(x) = x$, en la cual deg $g = 1$, se obtiene que deg $f = 1$, lo que también es imposible.

Suponiendo de antemano que nada se sabe del grado de transformación f, si ésta no tiene puntos fijos entonces, como antes, deducimos que deg $f = -1$. Si ahora ni un solo punto x es convertido, por la transformación f, en su antipoda x^*, aplicando otra vez el lema 5 a la transformación f y a la transformación idéntica, se obtiene que deg $f = 1$, lo que contradice la igualdad deg $f = -1$. Con esto queda demostrado el teorema.

PROBLEMAS

En los problemas 47–54 que siguen, por transformación de una circunferencia o una esfera en sí misma siempre se entiende su transformación *continua*.

47. Demuestre que si f es la transformación de una circunferencia en sí misma y deg $f \neq 1$, entonces f tiene un punto fijo y, además, convierte cierto punto de la circunferencia en su antipoda.

48. Sea f la misma que en el problema anterior. Demuestre las dos afirmaciones siguientes: a) si ninguno de los puntos de la circunferencia se convierte en su antipoda, entonces deg $f = 1$; b) si la circunferencia no está recubierta por su imagen, existe un punto fijo. ¿A qué es igual deg f en este último caso?

49. La transformación f de una circunferencia en sí misma se llama *impar* si convierte cada par de antipodas en un par de antipodas, es decir, si $f(x^*) = [f(x)]^*$ para cualquier punto x de la circunferencia. Demuestre que el grado de transformación impar es impar.

50. Demuestre que si f es la transformación continua de una circunferencia en sí misma y deg $f = 1$, se tiene un par de puntos-antipodas fijos.

51. Para cada número entero n indique un ejemplo de transformación de una esfera en sí misma que tenga grado n.

52. Compruebe que si f_1 y f_2 son transformaciones de una circunferencia o de una esfera en sí misma y si $f_3 = f_2 f_1$ es la composición de las tranformaciones f_1 y f_2 (véase la pág. 23), en este caso

$$\deg f_3 = \deg f_1 \cdot \deg f_2.$$

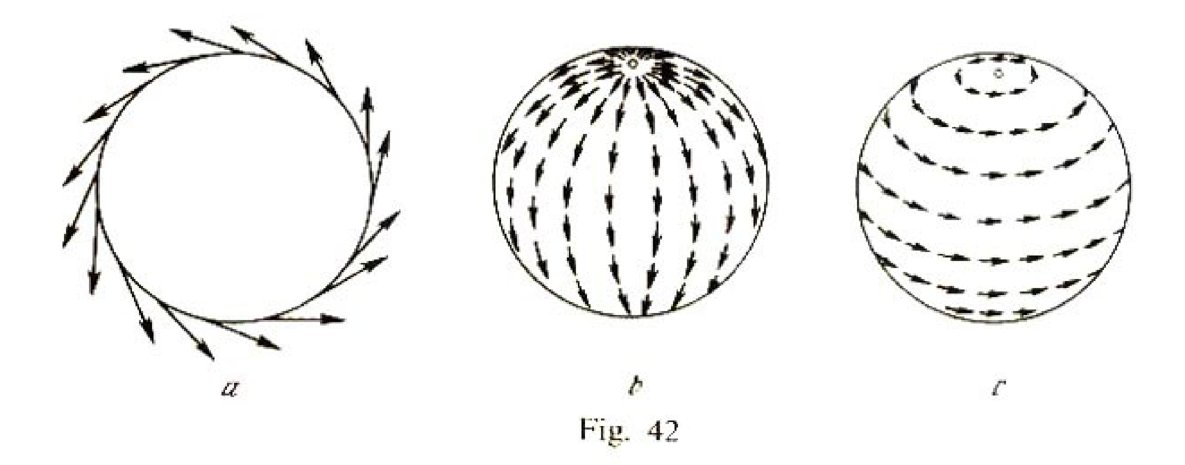


Fig. 42

53. Si f y g son transformaciones de una esfera en sí misma, por lo menos una de las tres transformaciones f, g y gf tiene un punto fijo. En particular, tal punto lo tiene la composición f^2 de cualquier transformación f en sí misma. ¿Es válida para la circunferencia esta afirmación?

54. Demuestre que cualquier transformación de una esfera en sí misma tiene un punto fijo o representa cierto par de puntos. ¿Es esto válido para la circunferencia?

Para terminar vamos a detenernos brevemente en los campos vectoriales y en sus puntos singulares. ¿Se puede construir sobre una circunferencia o sobre una esfera un *campo de direcciones* continuo, es decir, elegir en cada punto un vector tal que al pasar de un punto a otro estos vectores cambien continuamente? Por lo general interesan los campos de vectores tangentes a la circunferencia o a la esfera (fig. 42).

Los puntos donde los vectores se anulan o donde en general no existe una dirección determinada, se consideran *singulares* para el campo. Por ejemplo, en la esfera, la dirección de norte a sur (fig. 42, *b*) tiene puntos singulares en los polos, donde los vectores están dirigidos en sentidos distintos y, por lo tanto, no se cumple la continuidad. Lo mismo puede decirse de la dirección oeste–este (fig. 42, *c*).

La transformación continua f de una circunferencia en sí misma conduce naturalmente a un campo vectorial, basta dirigir desde cada punto x un vector a su punto-imagen $f(x)$. Por ejemplo, en la fig. 43 se ha representado el campo que surge de la transformación $\beta = 2\alpha$. Como en este caso el punto $\alpha = 0$ es fijo, el mismo es un punto singular del campo vectorial.

Si ni un solo vector del campo así obtenido es perpendicular a la circunferencia (es decir, si ningún punto de la circunferencia se convierte, por la tranformación f, en su antípoda), cada vector puede proyectarse sobre la tangente trazada por el punto de donde

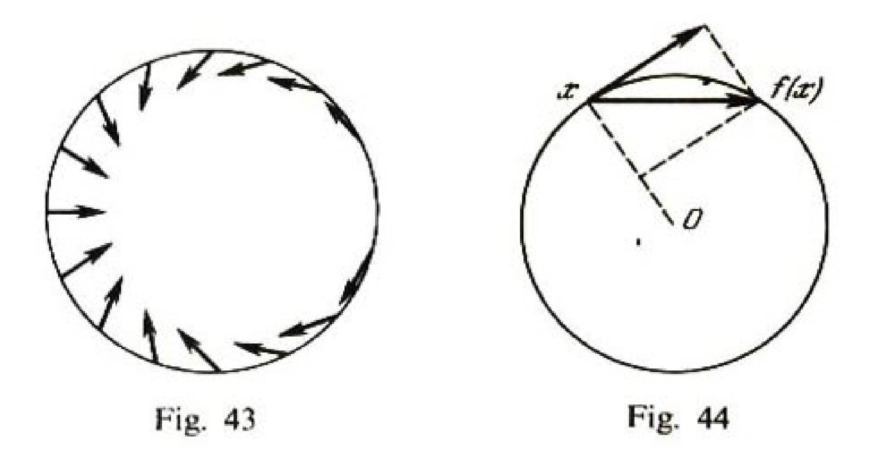


Fig. 43 Fig. 44

parte dicho vector (fig. 44), obteniendo, de esta forma, un campo de direcciones tangenciales. Aquellos vectores que son perpendiculares a la circunferencia, al proyectarse se convierten en vectores nulos y, por consiguiente, proporcionan puntos singulares del campo, de direcciones tangenciales. En la fig. 43 un punto de éstos es $\alpha = \pi$.

Como sabemos (véase el problema 47), toda transformación continua de una circunferencia con grado distinto de 1, tiene un punto fijo o la propiedad de convertir cierto punto en su antípoda. Por otra parte existen transformaciones con grado 1 sin puntos fijos y sin propiedad de conversión antípoda. Por eso se llega a la conclusión siguiente: *en la circunferencia existen campos continuos de vectores tangentes: todos ellos sólo pueden surgir de transformaciones de grado 1.*

Como quiera que en la esfera *toda* transformación continua tiene un punto fijo o propiedad de conversión antípoda, en ella no *existe un campo continuo de direcciones tangenciales.* Esta afirmación se llama, a veces, "teorema del erizo"; un erizo contraído en forma de bola no tiene púa alguna perpendicular a la superficie de su cuerpo.

SOLUCIONES Y RESPUESTAS

1. Las funciones $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$.

4. Sea f una involución continua del segmento [0, 1]. Entonces su gráfica coincide con su transformación especular en la recta $y = x$. Por eso, si la gráfica tiene dos puntos distintos en esta recta, estos dos puntos se unen por dos curvas distintas que entran en la gráfica. Pero eso es imposible, puesto que la función f es *univoca* en todas las partes de [0, 1].

5. Las habitaciones son los segmentos pequeños; como puertas se pueden considerar el extremo izquierdo del segmento grande y el

punto divisorio con la marca 0; habitaciones sin salida son los segmentos pequeños con las marcas distintas.

6. Supongamos que no hay aristas del tipo (1, -1) y (2, -2). Entonces es evidente que no habrá tampoco caras triangulares con tres marcas diferentes. Demostremos que en este caso en la frontera del cuadrado Q hay un número par de aristas del tipo (1, -2). Llamemos puertas a estas aristas. Debiamos llamar habitación sin salida a la cara triangular con tres marcas diferentes, entre las cuales figuran 1 y -2, pero caras así no hay. Por eso, si se empieza el paseo por las caras de triangulación entrando al cuadrado Q por alguna puerta exterior (1, -2), éste sólo termina saliendo del cuadrado Q por otra puerta exterior (1, -2). Esto significa que el número de aristas (1, -2) en la frontera del cuadrado Q es par.

Supongamos ahora que A es el vértice inferior izquierdo del cuadrado Q; B, el vértice opuesto al A; S, la parte de la frontera de Q formada por lados inferior y derecho; y S', la parte opuesta de la frontera. A cada arista del tipo (1, -2), situada en S', le corresponde una arista del tipo (-1, 2) situada en S. Por lo tanto, el número total de aristas fronterizas del tipo (-1, 2) es la suma del número de aristas (1, -2) sobre S, y del número de aristas (-1, 2) sobre S también. Pero esta misma suma es igual al número total de cambios de signo de las marcas al pasar por S desde el punto A hasta el punto B, y este número es impar. Resulta, pues, una contradicción.

7. El autor de este problema es H. Steinhaus (véase [6, pág. 19], [7, págs. 103 y 211]). Es interesante advertir que en el libro [7] sólo se da la solución publicada por primera vez en la revista polaca "Matemática", rechazada por el autor como errónea.

Llamaremos macizo de torres (o, para simplificar, simplemente macizo) a un conjunto de casillas o escaques de torre tal que ésta, moviéndose solamente por sus escaques, puede pasar desde cualquier casilla de este conjunto a cualquier otra del mismo. El conjunto de todos los escaques de torre del tablero lo dividimos en macizos aislados, de tal forma que la torre no pueda pasar de un macizo a otro. De este modo, dos macizos diferentes no pueden tener casillas comunes, pero sí puntos angulares comunes de éstas.

Un macizo puede tener huecos formados enteramente por escaques de rey o contenedores de otros macizos. Si un macizo no tiene huecos, sólo tiene una frontera, la exterior precisamente; de lo contrario tendrá, además, fronteras interiores (una o varias).

Consideramos evidente que la frontera exterior del macizo es una línea quebrada cerrada sin autointersecciones, por lo que, si el macizo no contiene casillas que se hallen en el borde del tablero, el rey puede dar libremente una vuelta alrededor de él, pasando por sus escaques lindantes con la frontera exterior. Si en el macizo hay casillas del borde del tablero, el rey no puede ya dar una vuelta a su alrededor y su movimiento termina en el borde del tablero. A todos estos paseos del rey no estorba la presencia de puntos angulares comunes con otros macizos. Los hechos indicados se ilustran en la fig. 45, donde los escaques de torre se han indicado con cruces, y el camino del rey, con trazos.

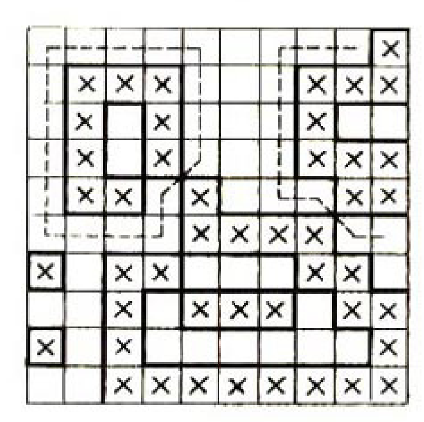


Fig. 45

La afirmación del problema vamos a demostrarla por reducción al absurdo: supondremos que, cualquiera que sea la posición inicial que se elija, la torre no puede pasar por sus casillas desde el borde inferior del tablero hasta el superior. Tenemos que demostrar que, en este caso, el rey puede pasar del borde izquierdo del tablero al derecho.

Supongamos que la torre, empezando su movimiento en cierta casilla de la primera horizontal (más baja), llega hasta la i-ésima, pero no puede pasar a la $(i + 1)$-ésima horizontal (fig. 46).

En adelante sólo se consideran aquellos macizos que tienen escaques en la i-ésima horizontal. Todos estos macizos los dividimos en dos clases: "buenos" y "malos". Si el macizo tiene aunque sea sólo una casilla en la primera horizontal, diremos que ese macizo es bueno, y en el caso contrario diremos que es malo. Por consiguiente, por cada macizo bueno, la torre puede subir desde la primera horizontal hasta la i-ésima, pero por uno malo no puede. Macizos buenos existen necesariamente en virtud de la suposición hecha.

De acuerdo con esta suposición, sobre cada escaque de la horizontal i-ésima, perteneciente a cualquier macizo bueno, debe haber un escaque de rey. Esto significa que todos los macizos buenos se encuentran en la parte del tablero formado por las horizontales primera, segunda, ..., i-ésima. A los macizos malos no se extiende esta limitación.

Examinemos con más atención la i-ésima horizontal del tablero. Si todos los escaques de torre de esta horizontal pertenecen a un solo macizo (que en este caso debe ser necesariamente bueno), el rey pasa con facilidad del borde izquierdo del tablero al derecho. Además, si todas las casillas de la i-ésima horizontal son de torre, el rey pasa sólo por la $(i + 1)$-ésima horizontal, en el caso contrario va por sus escaques de la i-ésima horizontal y por los escaques de la $(i + 1)$-ésima horizontal que se encuentran sobre las casillas de la i-ésima horizontal.

Por eso se puede considerar que los escaques de torre de la i-ésima horizontal pertenecen a distintos macizos. Suponiendo esto, recorremos dicha horizontal de izquierda a derecha y nos encontramos sucesivamente con los siguientes grupos de casillas:

1) al principio podemos encontrarnos con un grupo de escaques de rey, que llamaremos grupo de borde; pero puede no haber este grupo, y entonces el primer grupo será el de los escaques de torre que pertenecen

Fig. 46

a un mismo macizo y que, posiblemente, se mezclen con las casillas de rey;

2) un grupo de escaques de rey consecutivos, que llamaremos grupo separador;

3) un segundo grupo de escaques de torre, también pertenecientes a un macizo cualquiera, pero ya otro, y también mezclados, posiblemente, con casillas de rey;

4) otra vez un grupo separador de escaques de rey sucesivos, y así sucesivamente hasta el borde derecho del tablero; el último será un grupo de casillas de torre de un determinado macizo, o un grupo de borde de escaques de rey.

Algunos de estos grupos (o incluso todos) pueden estar formados por un solo escaque. También conviene advertir que distintos grupos (no vecinos) de casillas de torre pueden pertenecer a un mismo macizo: estos grupos se unen entre sí por medio de escaques situados fuera de la i-ésima horizontal.

El camino que sigue el rey desde el borde izquierdo del tablero al derecho lo vamos a construir por partes, procurando hacerlo pasar a través de los grupos de escaques separadores y de borde. Tomemos un macizo bueno cualquiera y un grupo de sus casillas en la i-ésima horizontal. A la izquierda y a la derecha de este grupo se encuentran, en general, grupos de casillas separadoras. Conducimos el rey desde el grupo separador izquierdo hasta el derecho por los escaques de las horizontales i-ésima e $(i + 1)$-ésima (véase la fig. 46 en la que los puntos inicial y final de este recorrido se señalan con los números 1 y 2). Luego el rey va por el grupo separador izquierdo de derecha a izquierda hasta que se encuentre con el macizo siguiente (en la figura es el camino desde el escaque 1 hasta el escaque 3). Si este macizo es bueno, el rey pasará por las casillas de las horizontales i-ésima e $(i + 1)$-ésima de derecha a izquierda hasta que se encuentre con un nuevo grupo separador (o de borde). Pero si este macizo es malo, el rey lo bordeará siguiendo sus escaques adyacentes a la frontera exterior del mismo, en sentido de las agujas del reloj. Como el macizo no contiene casillas de la primera horizontal, el rey llega hasta un nuevo grupo separador de escaques (o de borde) o hasta el borde izquierdo del tablero (en la figura es el camino desde el escaque 3 hasta el escaque 4).

Procediendo así sucesivamente, conducimos el rey desde el "centro" de la i-ésima horizontal hasta el borde izquierdo del tablero, es decir, en dirección contraria a la que hace falta. Análogamente construimos el camino desde el centro hasta el borde derecho, con la diferencia de que el rey pasa ahora sobre los macizos buenos de izquierda a derecha y bordea los macizos malos en sentido contrario al de las agujas del reloj. En definitiva, el camino del rey en la fig. 46 es el siguiente: de la casilla 4 va a la 3, de la 3 a la 1, de la 1 a la 2, de la 2 a la 5, de la 5 a la 6 y después, siguiendo el orden de los números, prosigue hasta el escaque 12.

La afirmación del problema se conserva si la torre se sustituye por la reina o si el rey y la torre cambian de papeles. En el caso de dos torres la situación es distinta: dé, por ejemplo, a una de las torres todos los escaques blancos, y a la otra todos los negros, y ninguna de ellas se moverá de su sitio.

Este problema se utiliza para demostrar el teorema del punto fijo (véase el § 8).

8. Haremos la demostración por el método de paseos. Supongamos que todas las casillas del tablero están ya ocupadas, de cierto modo, por fichas blancas y negras. Los dos lados blancos están ocupados por fichas blancas, y los dos lados negros, por fichas negras; las casillas angulares pueden estar ocupadas por fichas blancas o por fichas negras. Uniendo los centros de cada par de casillas hexagonales por medio de segmentos rectangulares se obtiene un rombo ("doble") triangulado en triángulos regulares (fig. 47, *a*). A cada casilla hexagonal del tablero le corresponde su vértice de triangulación del rombo doble. Los vértices correspondientes a las casillas (o fichas) blancas se marcan con el número 0, los demás, con el número 1. Llamaremos puerta a la arista de triangulación que tenga señales distintas. Se ve fácilmente que no hay caras sin salida. Por lo tanto, empezando el recorrido en un ángulo del rombo doble, lo terminamos en otro de sus ángulos. En la fig. 47, *b* nuestro camino une los lados inferior y superior del rombo. Esto significa que han ganado las blancas.

Este problema, lo mismo que el anterior, se puede utilizar para la demostración del teorema del punto fijo.

10. Sea m el número de todas las aristas; n, el número de todos los vértices, y $k_1, \ldots, k_n$, la multiplicidad de estos vértices. Entonces

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_n = 2m,$$

de manera que cada arista se tiene en cuenta en la multiplicidad de cada uno de sus extremos. Si ahora algunos de los sumandos del primer miembro de esta igualdad son impares, su número debe ser par.

11. Supongamos que los vértices de cada cara del polígono están marcados con los números 0, 1 y 2. En cada arista ponemos flechitas en dirección de 0 a 1, de 1 a 2 y de 2 a 0. Entonces cada cara recibe una orientación determinada: unas caras en sentido de las agujas del reloj, y otras, en sentido contrario. Cada dos caras contiguas tienen siempre orientación contraria. Por lo tanto, si las caras del primer tipo se pintan de blanco, y las del segundo tipo, de negro, se obtiene una distribución regular de los colores.

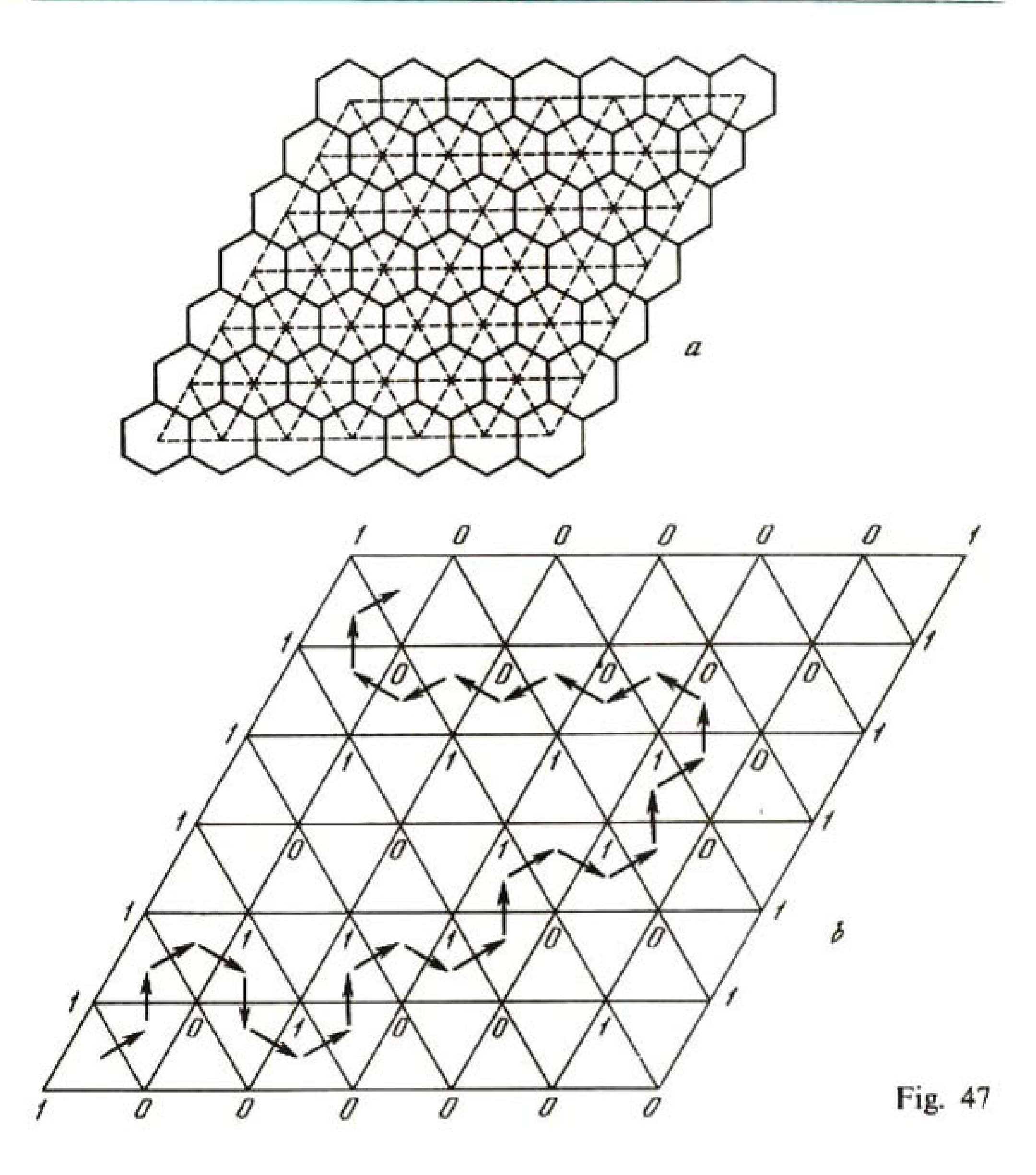
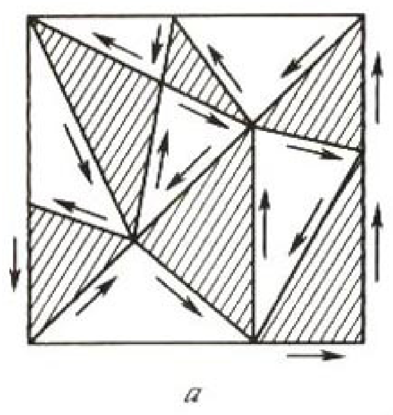


Fig. 47

Y a la inversa, supongamos que las caras de triangulación están pintadas con colores distribuidos regularmente. Si una arista de triangulación es el lado de una cara triangular negra, pondremos sobre esta arista una flechita de tal dirección que los puntos interiores de dicha cara queden a su izquierda. En este caso cada cara negra estará orientada en sentido contrario al de las agujas del reloj, y algunas caras blancas (a excepción de las adyacentes a la frontera del polígono), en sentido de dichas agujas (fig. 48, *a*).

Supongamos que hemos salido de uno de los vértices de triangulación, hemos pasado a lo largo de un camino cerrado, determinado por la dirección de las flechitas (y que puede tener puntos de autointersección) y hemos vuelto al vértice inicial. En



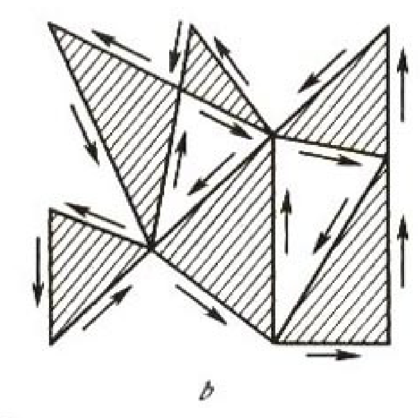


Fig. 48

este caso el número de aristas recorridas es divisible por 3. En efecto, si prescindimos de todas las caras de triangulación que se encuentran fuera del camino recorrido, quedará un polígono P tal que con su frontera (es decir, el camino que hemos recorrido) sólo lindarán sus caras de un solo color (negro, para precisar) (fig. 48, *b*). A fin de hallar el número de todas las aristas de frontera del polígono P, hay que restar del número de aristas de todas sus caras negras, el número total de aristas de todas las caras blancas. Pero estos dos últimos números son múltiplos de tres, por lo que su diferencia también lo es.

Así pues, el número de aristas en el camino cerrado del tipo indicado es divisible por 3. De aquí se deduce que si pasamos por las aristas desde el vértice A hasta el vértice B siguiendo dos caminos distintos y uno de ellos tiene p aristas y el otro q aristas, la diferencia $p - q$ es divisible por tres.

Está claro que de cualquiera de los vértices de triangulación se puede pasar (por las aristas) a cualquier otro vértice. Al hacerlo, en general, no prestamos atención a la dirección de las flechitas que hay en las aristas. Pero se puede conseguir que el movimiento transcurra siempre siguiendo dicha dirección; por ejemplo, si en alguna parte recorrimos una arista en sentido contrario al de la flecha, se puede dar un rodeo por las otras dos aristas de la cara vecina siguiendo ya la dirección de las flechas. Un rodeo análogo se da cuando el camino pasa por una arista de frontera del polígono inicial, desprovista de flecha.

Elijamos ahora un vértice cualquiera A, y sea B cualquier otro vértice. El camino por las aristas desde A hasta B (siguiendo la dirección de las flechas) puede ser distinto, y los diferentes caminos tienen distintos números de aristas, pero en virtud de lo antedicho, el resto de la división por 3 de todos esos números es el mismo. Atribuimos este resto al vértice B en calidad de marca. Hacemos lo mismo con todos los demás vértices. En este caso los

mismos resultarán numerados con las cifras 0, 1 y 2. Al mismo tiempo, cada cara tendrá tres marcas distintas.

Así hemos demostrado la equivalencia de las afirmaciones a) y b) del problema. Además es posible demostrar que cada una de ellas es equivalente a la siguiente afirmación: c) la multiplicidad de todos los vértices de triangulación interiores (que no están en la frontera del polígono) es par.

12. Examinemos los triángulos rayados (fig. 49). En cada uno de ellos, cualquiera que sea el color de los vértices, el número de lados que unen esos vértices de distinto color es par (igual a 0 ó a 2). El número total de tales aristas "abigarradas" en toda la triangulación es igual a la suma de los números de lados abigarrados de todos los triángulos rayados y, por lo tanto, también es par.

La afirmación del problema no se conserva para las triangulaciones arbitrarias del triángulo. Para un polígono arbitrario se puede demostrar la equivalencia de las tres afirmaciones que siguen: a) para cualquier iluminación bicolor de todos los vértices de triangulación, el número de aristas abigarradas es par; b) la paridad de todos los vértices es par; c) existe una iluminación bicolor regular de todas las caras teniendo en cuenta la región adicional exterior (esto último significa que la región del plano, adicional al polígono, se considera blanca, y entonces todas sus caras lindantes con la frontera son negras).

13. a) La transformación f es constante: ella toma el mismo valor y_0 en todos los puntos de X; b) la transformación f puede ser cualquiera, ya que como ε-entorno del punto y_0 se puede tomar todo el conjunto Y.

14. Se da un círculo de radio R con centro en el punto O; el

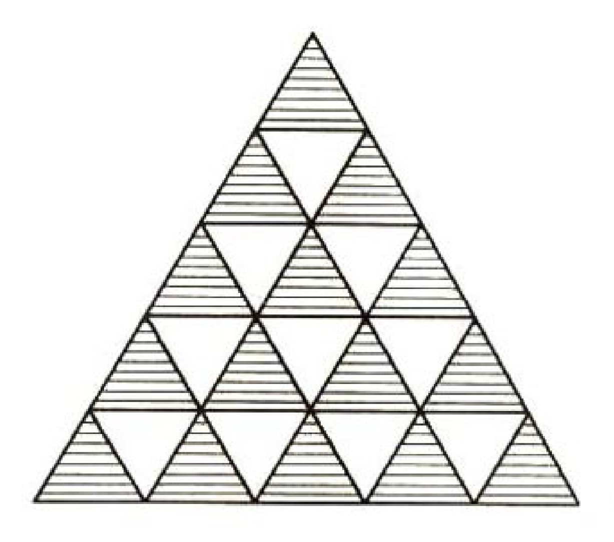


Fig. 49

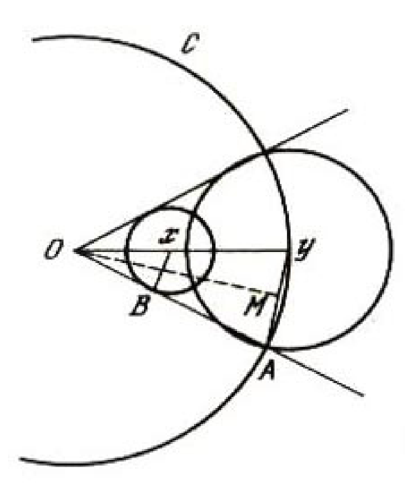


Fig. 50

punto x situado dentro de ese círculo a la distancia r $(0 < r < R)$ de su centro, y el punto y que es la proyección del punto x en la circunferencia de frontera C (fig. 50). Tomamos el número $\varepsilon > 0$. Sea A el punto de intersección de la circunferencia C y la circunferencia de radio ε con centro en y, y B, la proyección del punto x en la recta OA. Tenemos $yA = \varepsilon$ y $xB = \delta$. Hay que hallar δ conociendo los números R, r y ε. Supongamos que φ es la magnitud del ángulo yOA, y OM, la perpendicular del punto O a la recta yA. Del triángulo OxB obtenemos $\delta = r \operatorname{sen} \varphi$, y del triángulo OAM: $\operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} = \frac{\varepsilon}{2R}$. Por lo tanto,

$$\delta = 2r \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = 2r \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2}} = \varepsilon \frac{r}{2R^2} \sqrt{4R^2 - \varepsilon^2}.$$

En particular, de aquí se deduce que si $r = 0$, será $\delta = 0$. Esto significa que si $r = 0$, cualquiera que sea el número positivo ε que tomemos, para él no existirá el correspondiente número *positivo* δ, lo que indica una vez más la discontinuidad de la proyección radial en el centro del círculo.

17. Vamos a demostrar, por reducción al absurdo, la limitación de la función por arriba, es decir, la existencia del número M. Si no hubiera tal M, en el segmento $[a, b]$ se encontraría un punto x_1 en el cual $f(x_1) > 1$; un punto x_2 en el cual $f(x_2) > 2$, ...; un punto x_n en el cual $f(x_n) > n$, y así sucesivamente. En virtud de la compacidad del segmento, de la sucesión de puntos $\{x_n\}$ se destaca una subsucesión que converge hacia cierto punto x_0 de $[a, b]$. (Para simplificar consideramos que la propia sucesión $\{x_n\}$ converge hacia x_0). La función f es continua en el punto x_0, es decir, para cualquier punto $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un entorno del punto x_0 tal que las imágenes de

todos los puntos x de este entorno se encuentren en el ε-entorno del punto $f(x_0)$. Esto último significa que se cumplen las desigualdades

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

(sólo nos hace falta la segunda). Como la sucesión $\{x_n\}$ converge hacia x_0, todos sus puntos, a partir de cierto número n_0, se encuentran en el entorno hallado del punto x_0 y, por lo tanto, para todos los $n \geqslant n_0$ tenemos que $f(x_n) < f(x_0) + \varepsilon$, lo que contradice las supuestas desigualdades $f(x_n) > n$. Esta demostración sirve para cualquier compacto, y no sólo para el segmento.

18. Sea f una transformación continua del segmento $[a, b]$ en sí mismo. Si aunque sea uno de los extremos del segmento es fijo, nada hay que demostrar. En caso contrario consideramos en $[a, b]$ una función continua $g(x) = f(x) - x$. Tenemos $g(a) > 0$ y $g(b) < 0$. Según el teorema de valores intermedios, existe un punto x_0 tal que $g(x_0) = 0$. Por consiguiente, $f(x_0) = x_0$.

19. Sea f continua en el segmento $[a, b]$ y, para precisar, supongamos que $f(a) < c < f(b)$. Dividimos el segmento $[a, b]$ en dos partes iguales mediante el punto $d = \dfrac{a+b}{2}$. Si $f(d) = c$, todo está demostrado. Pero si, por ejemplo, $f(d) < c$, pasamos al segmento $[d, b]$ y procedemos, en adelante, de un modo análogo al expuesto en el texto para demostrar el teorema del punto fijo.

20. Si $f(a) = g(a)$ o $f(b) = g(b)$, todo está demostrado. En caso contrario tenemos $f(a) - g(a) < 0$ y $f(b) - g(b) > 0$ y la afirmación se deduce del teorema de los valores intermedios aplicado a la función $h(x) = f(x) - g(x)$ en el segmento $[a, b]$. La afirmación es incorrecta si g es una función continua arbitraria en $[a, b]$.

21. Sean x_1 y x_2 puntos tales del segmento $[a_1, a_2]$ que $f(x_1 = b_1$, $f(x_2) = b_2$ y supongamos, para precisar, que $b_1 < < a_1 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant a_2 < b_2$. La afirmación se deduce del teorema de los valores intermedios, aplicado a la función $f(x) - x$ en el segmento $[x_1, x_2]$.

22. Todo punto fijo de la transformación f también lo es de $g = f^2$. Por lo tanto, podemos suponer que f tiene un solo punto fijo x_0, y también que $a < x_0 < b$, $f(x) > x$ cuando $a \leqslant x < x_0$ y que $f(x) < x$ cuando $x_0 < x \leqslant b$. Como f transforma el segmento en sí mismo, se puede encontrar un punto x_1 ($a \leqslant x_1 < x_0$) tal que $f(x_1) = b$, y un punto x_2 ($x_0 < x_2 \leqslant b$) tal que $f(x_2) = a$. Por el teorema de los valores intermedios existe un punto

$x_3(x_1 \leqslant x_3 < x_0)$ tal que $f(x_3) = x_2$. Por eso $g(x_3) = f(f(x_3)) = f(x_2) = a$. Si $g(a) = a$, la transformación g tiene dos puntos fijos: a y x_0. En el caso contrario tenemos que $g(a) > a$, $g(x_3) = a < x_3$ y, aplicando el teorema de los valores intermedios a la función $g(x) - x$ en el segmento $[a, b]$, vemos que la función g tiene un punto fijo $x_4 (a < x_4 < x_3)$.

Si f transforma el segmento $[a, b]$ en sí mismo (pero no necesariamente sobre si mismo), $g = f^2$ sólo puede tener un punto fijo.

24. Si $x \neq 0$, la ecuación puede escribirse de la forma siguiente:

$$x^3\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3}\right) = 0.$$

Si $|x|$ es muy grande, la expresión entre paréntesis difiere poco de a_0. Por eso si $x > 0$ y x es un número muy grande, el primer miembro de la ecuación tiene el mismo signo que a_0, y si $x < 0$ y $|x|$ es muy grande, el mismo tiene signo contrario. Sólo nos resta decir que el polinomio de tercer grado es función continua de x. Con razonamientos análogos se demuestra que si $\frac{a_3}{a_0} < 0$, la ecuación escrita tiene por lo menos una raíz positiva, y si $\frac{a_3}{a_0} > 0$, por lo menos una negativa.

25. La afirmación se deduce del teorema de Borsuk – Ulam.

26. El teorema de Borsuk – Ulam sólo se puede aplicar si la temperatura al principio y al final de la hora es la misma. En este caso realmente se encuentran los dos instantes indicados.

27. La afirmación es correcta cuando cada uno de los polígonos tiene un número de lados par. Si siquiera uno de ellos tiene un número de lados impar, la afirmación sólo será correcta a condición de que aunque sea uno de sus vértices se encuentre en una recta que pase por los centros de los polígonos.

28. En el plano trazamos una recta arbitraria L y encerramos la curva K dada en una franja lo más estrecha posible, formada por dos rectas paralelas a L. Estas dos rectas reciben el nombre de *rectas de apoyo* de la curva K. Luego se encierra K en otra franja formada por dos rectas de apoyo perpendiculares a la recta L. Obtenemos asi un rectángulo circunscrito en torno a K. Si ahora, con un movimiento continuo se hace girar la recta L a un ángulo $\frac{\pi}{2}$, cada dos pares de rectas de apoyo cambiarán de sitio entre sí. Por eso, si la distancia entre las rectas de un par era mayor que en otro, después del giro esa distancia se hará menor; por lo tanto, en cierto instante tales distancias serán iguales y en la intersección se obtendrá un cuadrado.

32. Sea a un número real cualquiera y supongamos que $M = \frac{|a - f(a)|}{1 - \alpha}$, donde α es un número de la desigualdad (9.2). Hay que

demostrar que el segmento $[a - M, a + M]$ se convierte en si mismo por la transformación f. En efecto, sea x un punto cualquiera de este segmento. Entonces

$$|f(x) - f(a)| \leqslant \alpha|x - a| \leqslant \alpha M,$$

y, por lo tanto,

$$|f(x) - a| = |f(x) - f(a) + f(a) - a| \leqslant$$
$$\leqslant |f x) - f(a)| + |f(a) - a| \leqslant \alpha M + |f(a) - a|.$$

Utilizando la definición del punto M, aquí se puede sustituir $|f(a) - a|$ por $(1 - \alpha)M$. Entonces

$$|f(x) - a| \leqslant \alpha M + (1 - \alpha)\mathrm{M} = M,$$

que es lo que queríamos demostrar.

33. La respuesta es afirmativa. Demostraremos que la transformación f dada es una contracción en toda la recta numérica. Para dos números x e y reales cualesquiera tenemos

$$|f(x) - \mathrm{f}(y)| = \left|\frac{1}{4 + x^2} - \frac{1}{4 + y^2}\right| = \frac{|x^2 - y^2|}{(4 + x^2)(4 + y^2)} =$$
$$= \frac{|x + y|}{(4 + x^2)(4 + y^2)}|x - y|. \quad \text{(P. 1)}$$

Aplicando la conocida desigualdad $\sqrt{ba} \leqslant \frac{a + b}{2}$ (en la que $a \geqslant 0$ y $b \geqslant 0$) al caso en que $a = 4$ y $b = x^2$, obtenemos

$$|x| = \frac{1}{2}\sqrt{4x^2} \leqslant \frac{4 + x^2}{4}.$$

Por lo tanto,

$$|x + y| \leqslant |x| + |y| \leqslant \frac{4 + x^2 + 4 + y^2}{4} \leqslant 2 + \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{x^2y^2}{8} =$$
$$= \frac{1}{8}(4 + x^2)(4 + y^2).$$

Poniendo esta valoración en la igualdad (P.1), obtenemos

$$|f(x) - f(\mathrm{y})| \leqslant \frac{1}{8}|x - y|,$$

que es lo que hacia falta.

34. a) No; b) no (la transformación continua de la figura en ocho en sí misma sin puntos fijos se puede obtener, por ejemplo, así: la primera circunferencia se transforma en un punto común de ambas circunferencias, y después la segunda circunferencia se gira en un ángulo pequeño distinto de cero).

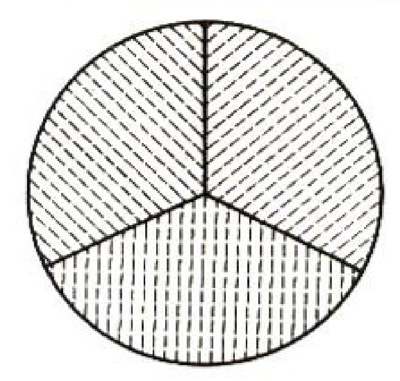


Fig. 51

35. a) Si (el circulo se puede proyectar continuamente sobre el tríodo a lo largo de las lineas de trazos (fig. 51); b) sí; c) no, ya que el "ocho" no tiene propiedad de punto fijo.

36. a) Sí; b) sí; c) si.

37. No.

38. No.

39. Sí. He aquí el bosquejo de la demostración. Sean X el compacto; Y, su subconjunto, y $f: X \to Y$, la retracción. Supongamos que $\{y_n\}$ es una sucesión de puntos de Y. De $\{y_n\}$ se puede separar una subsucesión $\{y_{n_k}\}$convergente hacia cierto punto x_0 de X. En la transformación f cada punto y_{n_k} permanece fijo y, por lo tanto , x_0 también es fijo. En este caso x_0 está contenido en Y y, por lo tanto, Y es compacto.

40. Sí. Por ejemplo, primero se puede proyectar continuamente el cuadrado sobre uno de sus lados y luego estirar este lado a toda la frontera.

41. Lo demostramos por reducción al absurdo: supongamos que en el círculo K hay un punto q tal que para cualquier punto p del círculo K tenemos $f(p) \neq q$, es decir q no pertenece a la imagen del círculo. Como la transformación f es idéntica en la circunferencia C, el punto q tiene necesariamente que estar dentro de K, y no en C. Sea φ la proyección central de la imagen del círculo del punto q sobre C. Entonces la composición de las transformaciones f y φ es la retracción de K sobre C. Y como esta retracción no es posible, la afirmación está demostrada.

42. Demostración por reducción al absurdo: supongamos que para cualquier punto p del círculo K tenemos $f(p) \neq g(p)$. Desde el punto $g(p)$ trazamos un rayo al punto $f(p)$ y lo prolongamos hasta su intersección con la circunferencia de frontera C en el punto $\varphi(p)$. Denotemos ahora $f(p) = q$ y $\varphi(p) = \psi(q)$. La transformación continua ψ, que convierte el punto q en punto $\psi(q)$, en virtud de la afirmación del problema 41, se ha determinado en todo el círculo K y convierte este último en circunferencia C, y en C es idéntico, o sea, es retracción de $\psi: K \to C$. Obtenemos, pues, una contradicción. La afirmación es incorrecta si g es una transformación continua arbitraria del círculo en el plano.

43. La homotopía que relaciona las transformaciones f_0 y f_1 se puede establecer por la fórmula

$$f_t(x) = (1 - t) f_0(x) + t f_1(x), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

44. El grado de transformación f es igual a 12, o sea, a la relación entre las velocidades con que se mueven el minutero y el horario del reloj. La transformación f tiene once puntos fijos: 0 horas, $1\frac{1}{11}$ horas, $2\frac{2}{11}$ horas, $3\frac{3}{11}$ horas y así sucesivamente. Como quiera que a cada posición del minutero le pueden corresponder distintas posiciones del horario, la transformación φ no está determinada.

45. El grado de la primera transformación es igual a 2; ésta tiene un punto fijo: 0 horas. El grado de la segunda transformación es igual a -1; ella tiene dos puntos fijos: 0 horas y 6 horas. El grado de la tercera transformación es igual a 1; la misma tiene puntos fijos.

51. Si $n = 0$, esta es la transformación que convierte toda la esfera en uno de sus puntos o, en general, una transformación tal en la cual la imagen de la esfera no recubre esta última. Si $n \neq 0$, figurémonos una esfera en forma de la superficie de un globo terrestre con coordenadas geográficas. La transformación necesaria se consigue si cada punto se convierte en un punto de esa misma latitud, cuya longitud viene multiplicada por n.

54. En la esfera hay un punto x tal que $f(f(x)) = x$ (problema 53). En este caso, introduciendo la designación $f(x) = y$ tenemos $f(y) = x$. Si $x = y$, este punto es fijo, de lo contrario, la transformación contribuirá a la permutación de los puntos x e y.

BIBLIOGRAFÍA

1. *M. B. Balk, V. G. Boltianski.* Geometría de las masas. Moscú, "Naúka", 1987. (En ruso.)
2. *V. G. Boltianski.* Método de iteraciones. Moscú, "Kvant", 1983. (En ruso.)
3. *V. G. Boltianski, V. A. Efremóvich.* Topología intuitiva. Moscú, "Naúka", 1982. (En ruso.)
4. *N. Ya. Vilenkin.* Método de aproximaciones sucesivas. Moscú, "Naúka", 1968. (En ruso.)
5. *N. Steenrod, W. Chinn.* First Concepts of Topology. New York, 1966.
6. *H. Steinhaus.* Calidoscopio matemático. Moscú, "Naúka", 1981. (En ruso.)
7. *H. Steinhaus.* Problemas y reflexiones. Moscú, "Mir", 1974. (En inglés.)

